



Fișă de lucru

Lecția 1 – Produsul cartezian a două mulțimi nevide

Clasa a 7-a – Capitolul 3 – Logică și mulțimi

Instrucțiuni

Aplică definiția produsului cartezian și relațiile dintre cardinali pentru a determina elementele mulțimilor $A \times B$, $B \times A$, cardinalul și structura perechilor ordonate. Durată recomandată: **30–40 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se dau mulțimile $A = \{2\}$ și $B = \{3, 4\}$. Determină mulțimea $A \times B$ și $B \times A$.

Rezolvare:

Prin definiție, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

$A \times B = \{(2, 3), (2, 4)\}$.

$B \times A = \{(3, 2), (4, 2)\}$.

Observație: Ordinea contează: $(2, 3) \neq (3, 2)$.

Exercițiul 2. Se consideră $C = \{a, b\}$ și $D = \{m, p\}$. Scrieți explicit:

(a) $C \times D$

(b) $D \times C$

Rezolvare:

(a) $C \times D = \{(a, m), (a, p), (b, m), (b, p)\}$.

(b) $D \times C = \{(m, a), (m, b), (p, a), (p, b)\}$.

Exercițiul 3. Scrieți toate elementele lui $A \times B$ și $B \times A$, în următoarele cazuri:

(a) $A = \{0, 1\}$, $B = \{4, 7\}$

(b) $A = \{a\}, B = \{a, b, c\}$

Rezolvare:

(a) $A \times B = \{(0, 4), (0, 7), (1, 4), (1, 7)\}, B \times A = \{(4, 0), (4, 1), (7, 0), (7, 1)\}.$

(b) $A \times B = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}, B \times A = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}.$ (*Perechea (a, a) apare în ambele.*)

Exercițiul 4. Determină cardinalul produsului cartezian:

(a) Dacă $\text{card}(A) = 3$ și $\text{card}(B) = 4$

(b) Dacă $\text{card}(C) = 6$ și $\text{card}(D) = 5$

(c) Dacă $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$

Rezolvare:

Folosim formula: $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B).$

(a) $3 \cdot 4 = 12.$ (b) $6 \cdot 5 = 30.$ (c) $3 \cdot 2 = 6.$

Exercițiul 5. Se dau:

$$A \times B = \{(5, 4), (5, 6), (7, 4), (7, 6), (9, 4), (9, 6)\}.$$

Determină mulțimile A și B și apoi calculează $\text{card}(A \times B).$

Rezolvare:

Prima componentă (toate valorile din stânga) formează mulțimea A :

$$A = \{5, 7, 9\}.$$

A doua componentă (toate valorile din dreapta) formează mulțimea B :

$$B = \{4, 6\}.$$

Atunci $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B) = 3 \cdot 2 = 6$ (confirmat de numărul de perechi listate).

Exercițiul 6. Se dau:

$$B \times A = \{(2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (8, 2), (8, 5)\}.$$

Determină mulțimile A și B . Scrieți și $A \times B$.

Rezolvare:

În $B \times A$, prima componentă provine din B : $B = \{2, 3, 8\}$. A doua componentă provine din A : $A = \{2, 5\}$.

Rezultă

$$A \times B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 8), (5, 2), (5, 3), (5, 8)\}.$$

Exercițiul 7. Se consideră mulțimile definite prin proprietăți:

(a) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

(b) $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq y \leq 2\}$

Determină $E \times F$.

Rezolvare:

Listăm elementele: $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $F = \{1, 2\}$.

$E \times F$ conține toate perechile cu primul element din E și al doilea din F :

$$E \times F = \{(-2, 1), (-2, 2), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Exercițiul 8. Fie $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}$ și $H = \{y \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq y \leq 1\}$. Scrie toate perechile din $G \times H$ și $H \times G$.

Rezolvare:

Vom lua $\mathbb{N}$ cu 0 inclus. Atunci $G = \{0, 1, 2\}$, iar $H = \{-1, 0, 1\}$.

$G \times H$: $(0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1)$.

$H \times G$: $(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)$.

Observație: Ordinea elementelor în pereche schimbă mulțimea produs: de aceea $G \times H \neq H \times G$ în general.

Succes!