

Lecția 7 – Plane paralele

Clasa a 8-a – Capitolul 3 – Geometrie în spațiu

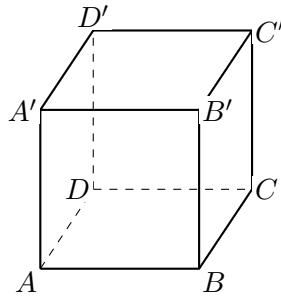
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind definiția planelor paralele, Criteriul de paralelism (două drepte concurente dintr-un plan paralele cu celălalt plan) și Teorema lui Thales în spațiu. Durata recomandată: **45–50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$.

- Precizați planul paralel cu planul (ABC) .
- Precizați planul paralel cu planul (ABB') .
- Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $(ADD') \parallel (BCC')$.



Exercițiul 2. Fie prisma triunghiulară regulată $ABC A' B' C'$.

- Numiți două fețe paralele ale prisme.
- Dacă aria bazei (ABC) este de 20 cm^2 , cât este aria bazei $(A' B' C')$?

Exercițiul 3. Se consideră prisma hexagonală regulată $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$.

- Numiți planul paralel cu planul bazei (ABC) .
- Numiți o față laterală paralelă cu fața $(ABB' A')$.

Exercițiul 4. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$. Punctele M, N, P, Q sunt mijloacele muchiilor laterale VA, VB, VC , respectiv VD .

- (a) Arătați că dreapta MN este paralelă cu AB .
- (b) Demonstrați că planul (MNP) este paralel cu planul bazei (ABC) .

Exercițiul 5. În cubul $ABCD A' B' C' D'$, demonstrați că planul (BDA') este paralel cu planul $(B' D' C)$.

Exercițiul 6. Fie piramida patrulateră $VABCD$. Un plan α este paralel cu baza (ABC) și intersectează muchiile VA, VB, VC, VD în punctele A', B', C', D' . Știind că $\frac{VA'}{VA} = \frac{1}{2}$, arătați că triunghiul $VA'B'$ este asemenea cu triunghiul VAB și determinați raportul de asemănare.

Exercițiul 7. Trei plane paralele $\alpha || \beta || \gamma$ intersectează două drepte d_1 și d_2 în punctele A_1, B_1, C_1 (pe d_1), respectiv A_2, B_2, C_2 (pe d_2). Dacă $A_1 B_1 = 6$ cm, $B_1 C_1 = 9$ cm și $A_2 B_2 = 8$ cm, calculați lungimea segmentului $B_2 C_2$.

Exercițiul 8. Fie tetraedrul $ABCD$. Punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ și $G \in (AD)$ sunt alese astfel încât:

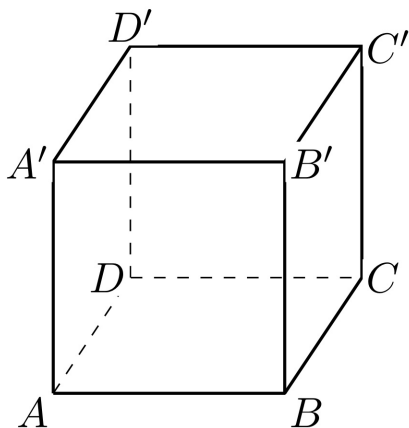
$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$$

Demonstrați că planul (EFG) este paralel cu planul (BCD) .

Succes!

Exercițiul 1. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$.

- Precizați planul paralel cu planul (ABC) .
- Precizați planul paralel cu planul (ABB') .
- Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $(ADD') \parallel (BCC')$.



a) $(ABC) \parallel (A'B'C')$

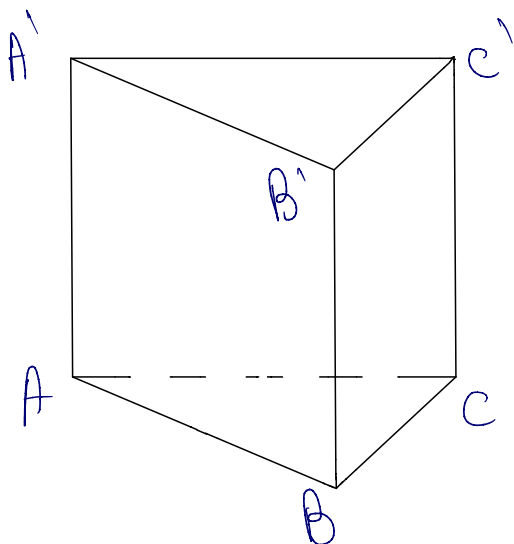
Obs Într-un cub, bazele / fețele opuse sunt paralele.

b) $(ABB') \parallel (DCC')$

c) Adevărat. Sunt fețe opuse.

Exercițiul 2. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA' B' C'$.

- Numiți două fețe paralele ale prisme.
- Dacă aria bazei (ABC) este de 20 cm^2 , cât este aria bazei $(A' B' C')$?



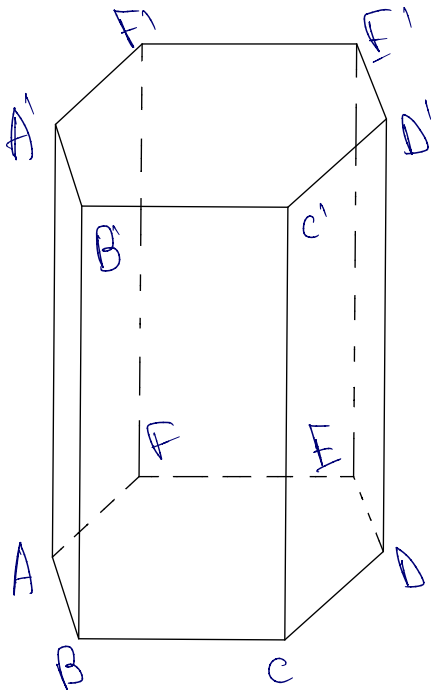
a) Bazele prismei: $(ABC) \parallel (A' B' C')$.

Obs Bazele unei prisme regulate sunt figuri geometrice identice, situate în plane paralele.

Deci, $S_{ABC} = S_{A'B'C'} = 20 \text{ cm}^2$.

Exercițiul 3. Se consideră prisma hexagonală regulată $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$.

- Numiți planul paralel cu planul bazei (ABC).
- Numiți o față laterală paralelă cu fața ($ABB'A'$).

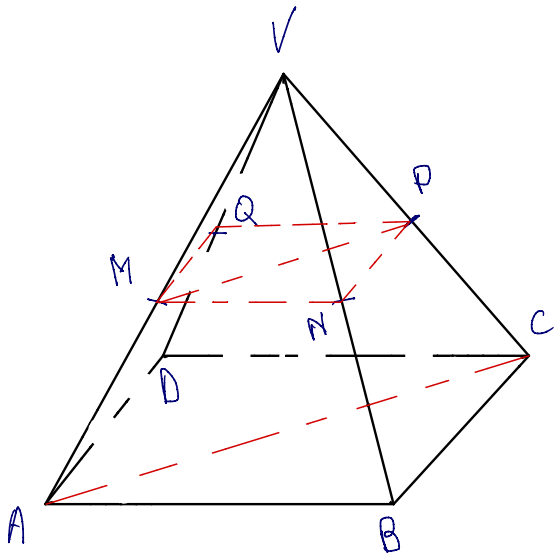


a) $(ABC) \parallel (A'B'C')$

e) Trebuie să găsim fața opusă.
 $(A'B'B'A') \parallel (D'E'E'D')$

Exercițiul 4. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$. Punctele M, N, P, Q sunt mijloacele muchiilor laterale VA, VB, VC , respectiv VD .

- Arătați că dreapta MN este paralelă cu AB .
- Demonstrați că planul (MNP) este paralel cu planul bazei (ABC) .



a) În $\triangle VAB$: $VM = MA$
 $VN = NB$ } $\Rightarrow$ MN linie mijlocie în $\triangle VAB$

$\Rightarrow MN \parallel AB$

g) Im ΔVNP : $VN = NB$
 $VP = PC$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow NP$ linie mijlocie în $\triangle VBC \Rightarrow NP \parallel BC$

$$MN \parallel AB \quad ? \Rightarrow MN \parallel (ABC)$$

$$AB \subset (ABC)$$

NP11BC

$$B \subset (A \cap B)$$

$$2 \Rightarrow \text{NN II (ABC)}$$

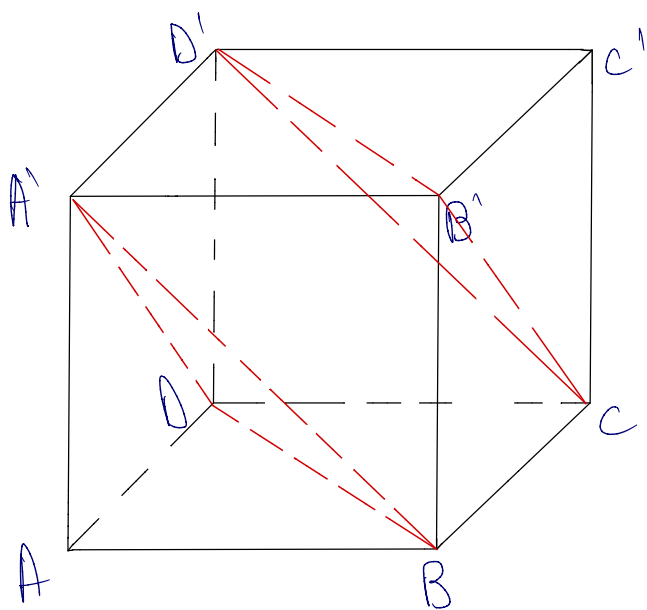
$\gamma \Rightarrow NP11(ABC)$

$$\text{MIN} \cap \text{NP} = \{N\}$$

$$MN, NP \subset (MNP)$$

$$\Rightarrow (MNP) \parallel (ABC)$$

Exercițiul 5. În cubul $ABCD A' B' C' D'$, demonstrați că planul (BDA') este paralel cu planul $(B'D'C)$.



Deoarece $B'B = D'D$
 $B'B \parallel D'D$ } $\Rightarrow B'BDD'$ paralelogram $\Rightarrow B'D' \parallel BD$

De asemenea, $BC = A'D'$
 $BC \parallel A'D'$ } $\Rightarrow A'BCD'$ paralelogram $\Rightarrow A'B \parallel D'C$

$B'D' \parallel BD$
 $BD \subset (BDA')$ } $\Rightarrow B'D' \parallel (BDA')$

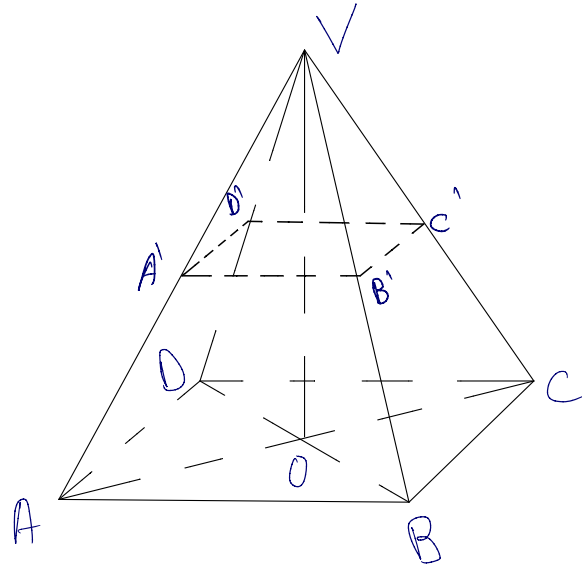
$D'C \parallel A'B$
 $A'B \subset (BDA')$ } $\Rightarrow D'C \parallel (BDA')$

$B'D' \cap D'C = \{D'\}$

$B'D', D'C \subset (B'D'C)$

$\Rightarrow (BDA') \parallel (B'D'C)$

Exercițiul 6. Fie piramida patrulateră $VABCD$. Un plan α este paralel cu baza $(ABCD)$ și intersectează muchiile VA, VB, VC, VD în punctele A', B', C', D' . Știind că $\frac{VA'}{VA} = \frac{1}{2}$, arătați că triunghiul $VA'B'$ este asemenea cu triunghiul VAB și determinați raportul de asemănare.



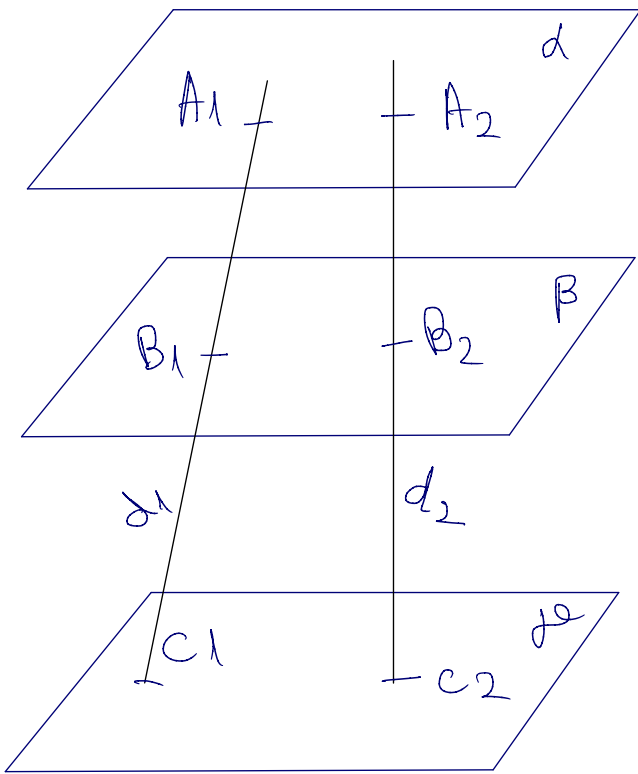
$$\left. \begin{array}{l} \text{Din enunț, } (A'B'C'D') \parallel (ABCD) \\ (VAB) \cap (A'B'C'D') = A'B' \\ (VAB) \cap (ABCD) = AB \end{array} \right\} \Rightarrow A'B' \parallel AB$$

În $\triangle VAB$, avem $A'B' \parallel AB \xrightarrow{\text{TFA}} \triangle VA'B' \sim \triangle VAB \Rightarrow$

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{A'B'}{AB} = k \text{ (raportul de asemănare)}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{VA'}{VA} = k \\ \frac{VA'}{VA} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Exercițiul 7. Trei plane paralele $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ intersectează două drepte d_1 și d_2 în punctele A_1, B_1, C_1 (pe d_1), respectiv A_2, B_2, C_2 (pe d_2). Dacă $A_1B_1 = 6$ cm, $B_1C_1 = 9$ cm și $A_2B_2 = 8$ cm, calculați lungimea segmentului B_2C_2 .



Sol. Folosim Teorema lui Thales în spațiu:

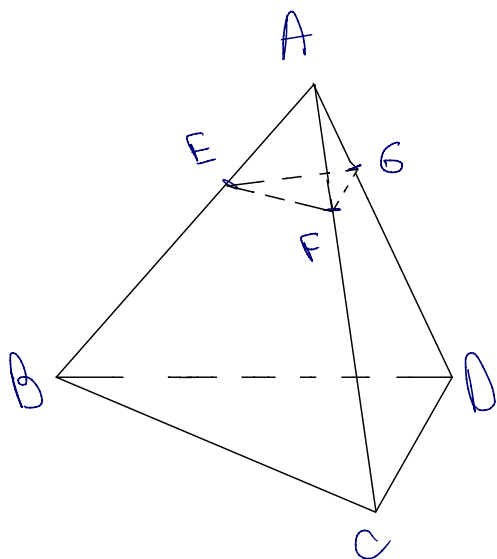
$$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{8}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{9 \cdot 8}{6} = \frac{72}{6} \Rightarrow x = 12 \text{ cm} \Rightarrow B_2C_2 = 12 \text{ cm}$$

Exercițiul 8. Fie tetraedrul $ABCD$. Punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ și $G \in (AD)$ sunt alese astfel încât:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$$

Demonstrați că planul (EFG) este paralel cu planul (BCD) .



$$\text{În } \triangle ABC, \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \xrightarrow{\text{R.T. Thales}} EF \parallel BC$$

$$\text{În } \triangle ACD, \frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AD} \xrightarrow{\text{R.T. Thales}} FG \parallel CD$$

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel BC \\ BC \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow EF \parallel (BCD)$$

$$\left. \begin{array}{l} FG \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow FG \parallel (BCD)$$

$$EF \cap FG = \{F\}$$

$$EF, FG \subset (EFG)$$

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel (BCD) \\ FG \parallel (BCD) \\ EF \cap FG = \{F\} \\ EF, FG \subset (EFG) \end{array} \right\} \Rightarrow (EFG) \parallel (BCD)$$