

## Lecția 13 – Înălțimea trunchiului de piramidă și a trunchiului de con

Clasa a 8-a – Capitolul 1 – Geometrie în spațiu

### Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind formulele care leagă elementele trunchiului (înălțime, apoteme, raze, muchii).

- Pentru trunchiul de piramidă:  $a_{tr}^2 = (a_B - a_b)^2 + h_{tr}^2$
- Pentru trunchiul de con:  $G^2 = (R - r)^2 + h_{tr}^2$

Durata recomandată: **45–50 minute**.

### Exerciții

**Exercițiul 1.** Se consideră un trunchi de con circular drept cu razele bazelor  $R = 7$  cm și  $r = 3$  cm, iar înălțimea  $h = 3$  cm. Calculați lungimea generatoarei trunchiului de con.

**Exercițiul 2.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari  $L = 14$  cm, latura bazei mici  $l = 6$  cm și înălțimea  $h = 3$  cm. Calculați apotema trunchiului de piramidă.

**Exercițiul 3.** Un trunchi de con are generatoarea  $G = 10$  cm și diferența razelor  $R - r = 6$  cm. Calculați înălțimea trunchiului de con.

**Exercițiul 4.** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari  $L = 12$  cm, latura bazei mici  $l = 6$  cm și muchia laterală  $m = 5$  cm. Calculați înălțimea trunchiului de piramidă.

**Exercițiul 5.** Aria secțiunii axiale a unui trunchi de con circular drept este  $48 \text{ cm}^2$ . Razele bazelor sunt  $R = 7$  cm și  $r = 5$  cm. Calculați înălțimea trunchiului de con.

**Exercițiul 6.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea  $h = 4$  cm, apotema bazei mari  $a_B = 6$  cm și apotema trunchiului  $a_{tr} = 5$  cm. Calculați lungimea laturii bazei mici ( $l$ ).

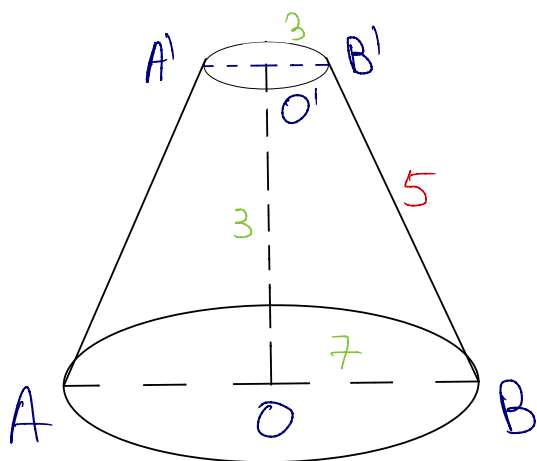
**Exercițiul 7.** Un trunchi de con circular drept are volumul  $V = 148\pi \text{ cm}^3$ , înălțimea  $h = 4 \text{ cm}$  și raza bazei mici  $r = 3 \text{ cm}$ . Calculați raza bazei mari ( $R$ ).

**Exercițiul 8.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari  $L = 20 \text{ cm}$ , latura bazei mici  $l = 8 \text{ cm}$  și muchia laterală face un unghi de  $45^\circ$  cu planul bazei mari. Calculați:

- (a) Înălțimea trunchiului de piramidă.
- (b) Volumul trunchiului de piramidă.

**Succes!**

**Exercițiul 1.** Se consideră un trunchi de con circular drept cu razele bazelor  $R = 7$  cm și  $r = 3$  cm, iar înălțimea  $h = 3$  cm. Calculați lungimea generatoarei trunchiului de con.

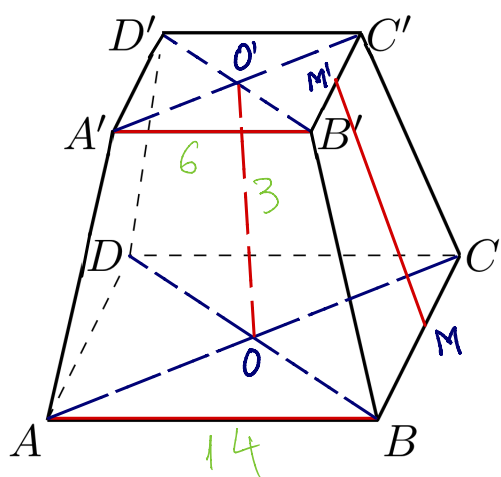


$$G^2 = R^2 + (R-r)^2$$

$$\Rightarrow G^2 = 3^2 + (7-3)^2 = 9 + 4^2 = 9 + 16$$

$$\Rightarrow G^2 = 25 \Rightarrow G = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

**Exercițiul 2.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari  $L = 14$  cm, latura bazei mici  $l = 6$  cm și înălțimea  $h = 3$  cm. Calculați apotema trunchiului de piramidă.



O - mijloc [AC] }  $\Rightarrow$  OM linie mijlocie  
M - mijloc [BC] } în  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow OM = \frac{AB}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

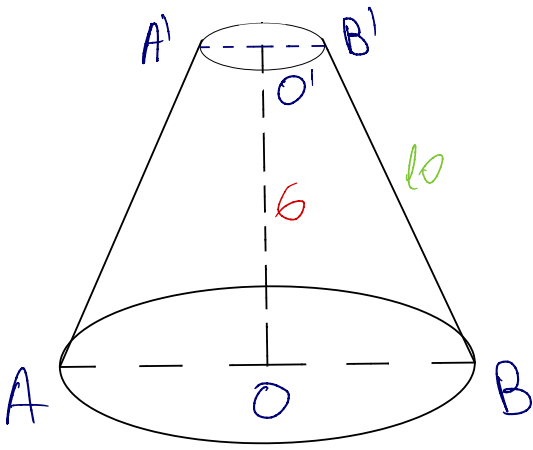
O' - mijloc [A'C'] }  $\Rightarrow$  O'M' linie mijlocie  
M' - mijloc [B'C'] } în  $\triangle A'B'C'$

$$\Rightarrow O'M' = \frac{A'B'}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$a_{tn}^2 = (a_B - a_b)^2 + h^2 \Rightarrow a_{tn}^2 = (7 - 3)^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow a_{tn} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

**Exercițiul 3.** Un trunchi de con are generatoarea  $G = 10$  cm și diferența razelor  $R - r = 6$  cm. Calculați înălțimea trunchiului de con.

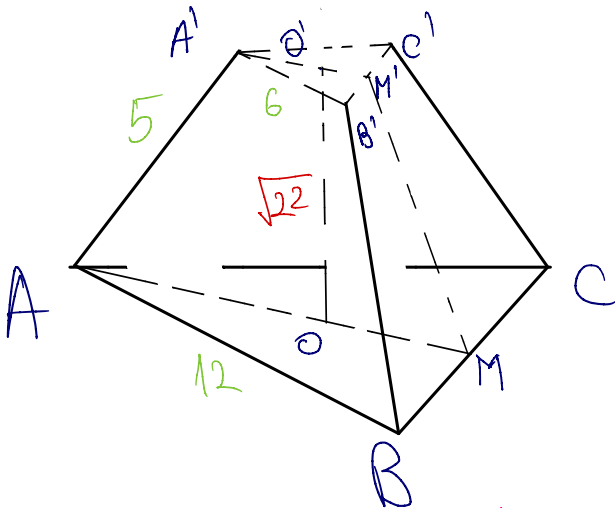


$$G^2 = R^2 + (R-r)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = G^2 - (R-r)^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

**Exercițiul 4.** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari  $L = 12$  cm, latura bazei mici  $l = 6$  cm și muchia laterală  $m = 5$  cm. Calculați înălțimea trunchiului de piramidă.



$$a_B = OM$$

$$\triangle ABC \text{ echilateral} \Rightarrow AM = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$O - \text{centru de greutate} \Rightarrow OM = \frac{1}{3} AM$$

$$OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$a_{B'} = O'M'$$

$$\triangle A'B'C' \text{ echilateral} \Rightarrow A'M' = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

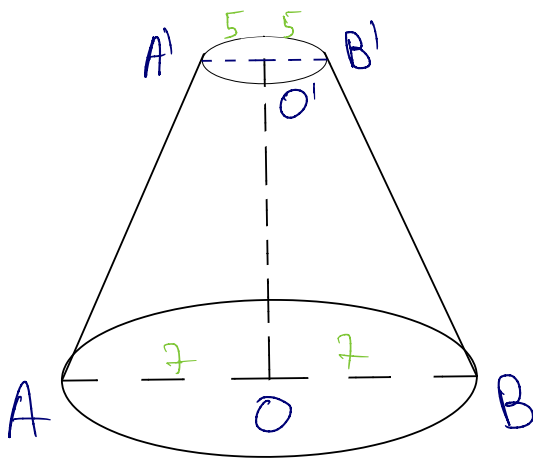
$$O' - \text{centru de greutate} \Rightarrow O'M' = \frac{1}{3} A'M'$$

$$\Rightarrow O'M' = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$a_{\text{tr}}^2 = (a_B - a_{B'})^2 + R^2 \Rightarrow R^2 = 5^2 - (2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 = 25 - (\sqrt{3})^2 = 25 - 3 = 22$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{22} \text{ cm}$$

**Exercițiul 5.** Aria secțiunii axiale a unui trunchi de con circular drept este  $48 \text{ cm}^2$ . Razele bazelor sunt  $R = 7 \text{ cm}$  și  $r = 5 \text{ cm}$ . Calculați înălțimea trunchiului de con.



Secțiunea axială este reprezentată de trapezul isoscel  $A'B'BA$ .

$$A_{A'B'BA} = \frac{(AB + A'B') \cdot O'O}{2}$$

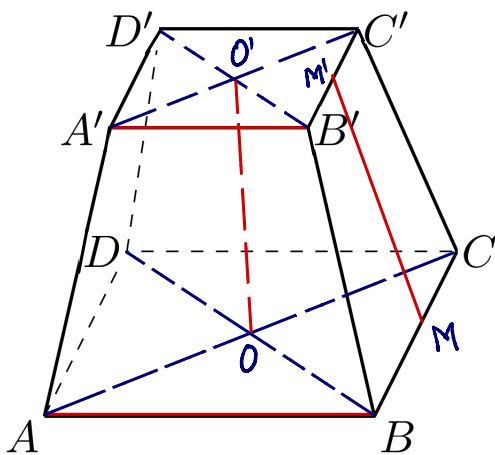
$$AB = 2R = 2 \cdot 7 = 14 \text{ cm}$$

$$A'B' = 2r = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow 48 = \frac{(14 + 10) \cdot h}{2} \quad | \cdot 2 \Rightarrow 96 = 24 \cdot h \Rightarrow h = 96 : 24$$

$$h = 4 \text{ cm}$$

**Exercițiul 6.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea  $h = 4 \text{ cm}$ , apotema bazei mari  $a_B = 6 \text{ cm}$  și apotema trunchiului  $a_{tr} = 5 \text{ cm}$ . Calculați lungimea laturii bazei mici ( $l$ ).



$$a_{tr}^2 = (a_B - a_b)^2 + h^2$$

$$\Rightarrow 5^2 = (6 - a_b)^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow 25 = (6 - a_b)^2 + 16 \quad | -16$$

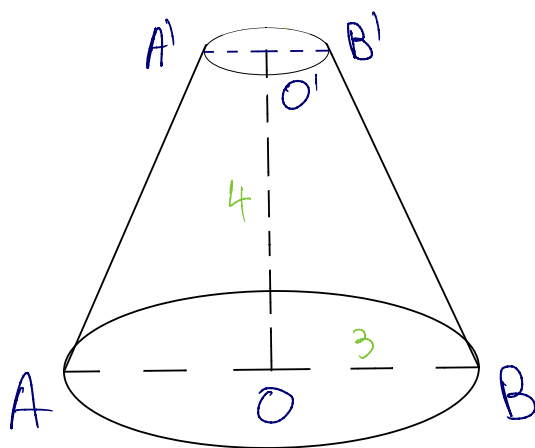
$$(6 - a_b)^2 = 9 \Rightarrow 6 - a_b = \sqrt{9}$$

$$6 - a_b = 3 \Rightarrow a_b = 3 \text{ cm} = O'M'$$

$O'$  - mijloc  $[A'C']$   
 $M'$  - mijloc  $[B'C']$  }  $\Rightarrow O'M'$  linie mijlocie  $\Rightarrow O'M' = \frac{A'B'}{2} \Rightarrow$   
 în  $\triangle A'B'C'$

$$\Rightarrow A'B' = 2 \cdot O'M' = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$

**Exercițiul 7.** Un trunchi de con circular drept are volumul  $V = \overset{156}{\cancel{156}} \pi \text{ cm}^3$ , înălțimea  $h = 4 \text{ cm}$  și raza bazei mici  $r = 3 \text{ cm}$ . Calculați raza bazei mari ( $R$ ).



$$V = \frac{\pi R}{3} (R^2 + r^2 + R \cdot r) \Rightarrow$$

$$156\pi = \frac{\pi \cdot 4}{3} (R^2 + 3^2 + R \cdot 3) / \cdot \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \overset{39}{\cancel{156}} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} = R^2 + 3 \cdot R + 9$$

$$117 = R^2 + 3R + 9 / -9 \Rightarrow R^2 + 3R = 108$$

Dim descompunerea în factori primi:

$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$

$$\Rightarrow R(R+3) = 2^2 \cdot 3^3$$

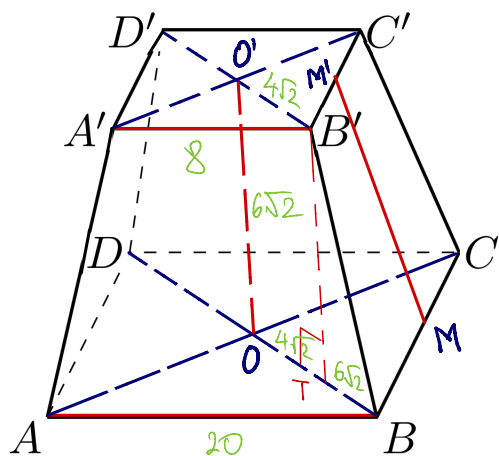
$$2^2 \cdot 3^3 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 3^2 = 4 \cdot 3 \cdot 9 = 12 \cdot 9$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow R(R+3) = 9 \cdot 12 \\ R(R+3) = 9 \cdot (9+3) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow R = 9 \text{ cm}$$

**Exercițiul 8.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari  $L = 20$  cm, latura bazei mici  $l = 8$  cm și muchia laterală face un unghi de  $45^\circ$  cu planul bazei mari. Calculați:

- (a) Înălțimea trunchiului de piramidă.  
(b) Volumul trunchiului de piramidă.



a) Fie  $B'T \perp OB, T \in OB$ .

$$ABCD \text{ pătrat} \Rightarrow BD = L\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow BO = OD = \frac{BD}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$A'B'C'D' \text{ pătrat} \Rightarrow B'D' = l\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow B'O' = O'D' = \frac{B'D'}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} O'O \perp OB & \Rightarrow O'O \parallel B'T \\ B'T \perp OB & \Rightarrow O'B' \parallel OT \end{aligned} \Rightarrow O'B'TO \text{ paralelogram} \Rightarrow O'B' = OT = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$TB = OB - OT = 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{Din ipoteză, } \angle B'BT = 45^\circ \\ \angle B'TB = 90^\circ \end{aligned} \Rightarrow \triangle B'TB \text{ dreptunghic isoscel}$$

$$\Rightarrow B'T = TB = 6\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow R = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$B'T = O'O = R$$

$$b) V = \frac{R}{3} (A_B + A_G + \sqrt{A_B A_G})$$

$$A_B = AB^2 = L^2 = 20^2 = 400 \text{ cm}^2$$

$$A_G = G^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{6\sqrt{2}}{3} (400 + 64 + \sqrt{400 \cdot 64}) = 2\sqrt{2} (400 + 64 + \sqrt{400 \cdot 64})$$

$$V = 2\sqrt{2} (464 + 20 \cdot 8) = 2\sqrt{2} (464 + 160) = 2\sqrt{2} \cdot 624$$

$$\Rightarrow V = 1248\sqrt{2} \text{ cm}^3$$