

Lecția 12 – Înălțimea piramidei. Înălțimea conului

Clasa a 8-a – Capitolul 1 – Geometrie în spațiu

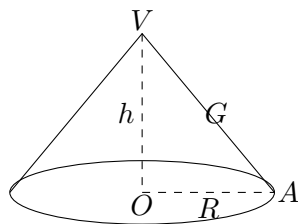
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind proprietățile înălțimii în piramida regulată și în conul circular drept, aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiurile formate de înălțime cu razele sau apotemele. Durata recomandată: **45–50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu înălțimea $VO = 4$ cm și latura bazei $AB = 6$ cm. Calculați lungimea apotemei piramidei (VM , unde M este mijlocul laturii BC).

Exercițiul 2. Un con circular drept are raza bazei $R = 5$ cm și generatoarea $G = 13$ cm. Calculați înălțimea conului (h).

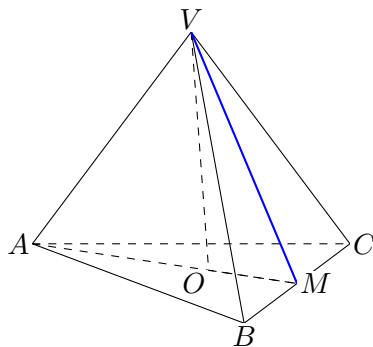


Exercițiul 3. O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală $m = 10$ cm și diagonala bazei $AC = 12$ cm. Calculați înălțimea piramidei.

Exercițiul 4. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$. Latura bazei este $AB = 10$ cm, iar apotema piramidei este $VM = 13$ cm (unde M este mijlocul lui BC). Calculați înălțimea piramidei.

Exercițiul 5. Un con circular drept are diametrul bazei egal cu 24 cm, iar generatoarea este cu 3 cm mai mare decât înălțimea. Calculați înălțimea conului.

Exercițiul 6. O piramidă triunghiulară regulată $VABC$ are latura bazei $AB = 12$ cm și apotema piramidei $VM = 4$ cm. Calculați lungimea înălțimii VO a piramidei.

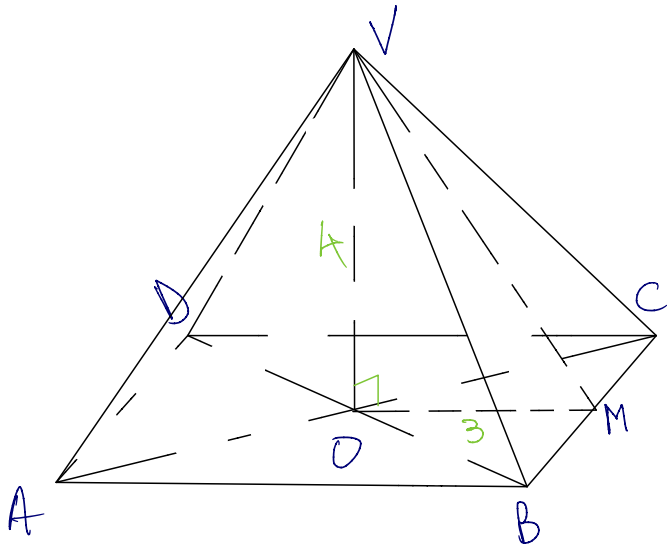


Exercițiul 7. Înălțimea unui tetraedru regulat este egală cu $2\sqrt{6}$ cm. Calculați lungimea muchiei tetraedrului.

Exercițiul 8. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are toate cele 8 muchii congruente (muchii laterale sunt egale cu muchiile bazei). Știind că suma lungimilor tuturor muchiilor este $48\sqrt{2}$ cm, calculați înălțimea piramidei.

Succes!

Exercițiul 1. Se consideră o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu înălțimea $VO = 4$ cm și latura bazei $AB = 6$ cm. Calculați lungimea apotemei piramidei (VM , unde M este mijlocul laturii BC).



$$\left. \begin{array}{l} ABCD \text{ pătrat} \\ AC \cap BD = \{O\} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AO = OC \\ CM = MB \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow OM$ linie mijlocie în $\triangle CAB$

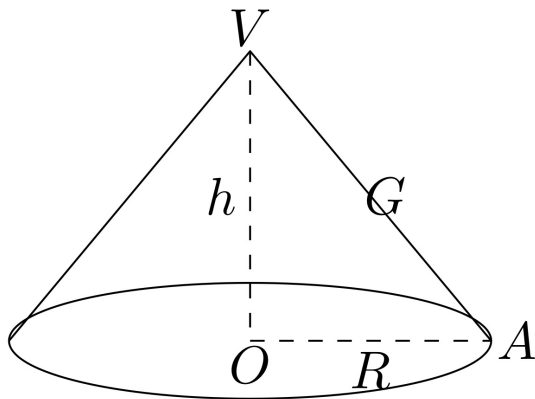
$$\Rightarrow OM = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} VO \perp (ABCD) \\ OM \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow VO \perp OM$$

În $\triangle VOM$ dreptunghic aplicăm T.P.: $VM^2 = VO^2 + OM^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow VM^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow VM = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Exercițiul 2. Un con circular drept are raza bazei $R = 5$ cm și generatoarea $G = 13$ cm. Calculați înălțimea conului (h).



$$\left. \begin{array}{l} VO \perp C(O, OA) \\ OA \subset C(O, OA) \end{array} \right\} \Rightarrow VO \perp OA$$

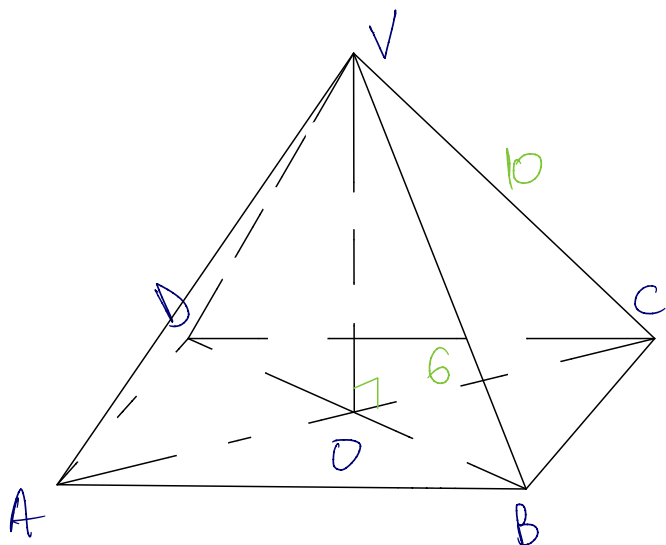
$\Rightarrow$ În $\triangle VOA$ dreptunghic aplicăm T.P.:

$$VA^2 = VO^2 + OA^2 \Rightarrow G^2 = h^2 + R^2$$

$$\Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h^2 = 169 - 25 = 144$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală $m = 10$ cm și diagonala bazei $AC = 12$ cm. Calculați înălțimea piramidei.



$$m = VA = VB = VC = VD = 10 \text{ cm}$$

$$ABCD \text{ pătrat} \Rightarrow AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

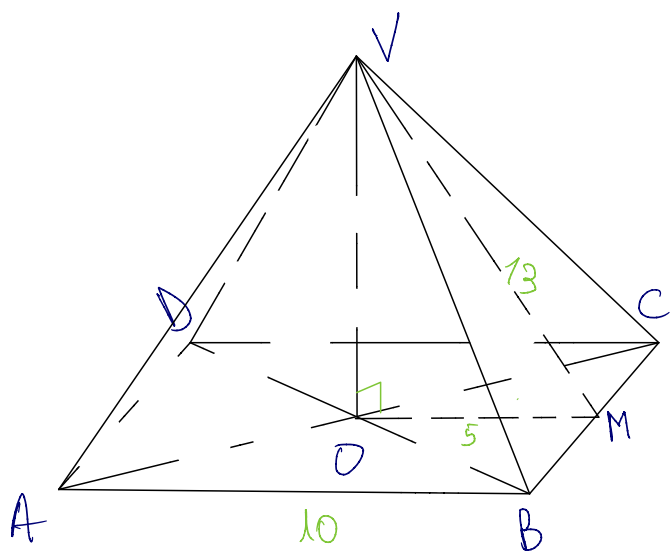
$$\begin{aligned} VO \perp (ABCD) \\ OC \in (ABCD) \end{aligned} \Rightarrow VO \perp OC$$

$\Rightarrow$ În $\triangle VOC$ dreptunghic aplic T.P.:

$$VC^2 = VO^2 + OC^2 \Rightarrow VO^2 = VC^2 - OC^2$$

$$\Rightarrow VO^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow VO = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$. Latura bazei este $AB = 10$ cm, iar apotema piramidei este $VM = 13$ cm (unde M este mijlocul lui BC). Calculați înălțimea piramidei.



$$\begin{aligned} ABCD \text{ pătrat} \\ AC \cap BD = \{O\} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} AO = OC \\ CM = MB \end{aligned} \Rightarrow$$

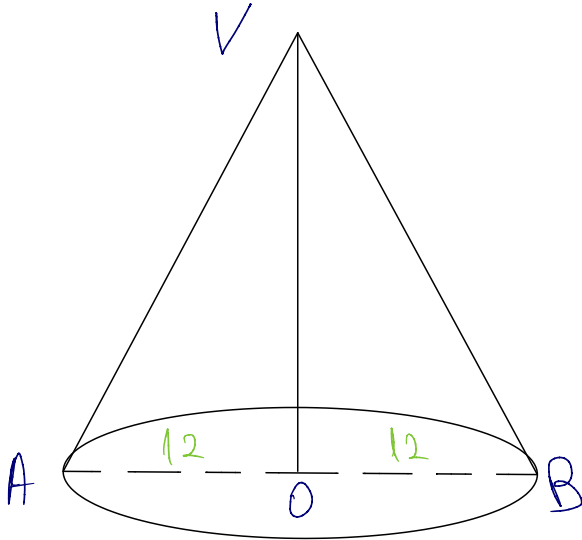
$\Rightarrow OM$ linie mijlocie în $\triangle CAB$

$$\Rightarrow OM = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} VO \perp (ABCD) \\ OM \in (ABCD) \end{aligned} \Rightarrow VO \perp OM \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{În } \triangle VOM \text{ dreptunghic aplic T.P.: } VM^2 &= VO^2 + OM^2 \\ \Rightarrow VO^2 &= VM^2 - OM^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow VO = \sqrt{144} \\ \Rightarrow VO &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

Exercițiul 5. Un con circular drept are diametrul bazei egal cu 24 cm, iar generatoarea este cu 3 cm mai mare decât înălțimea. Calculați înălțimea conului.



$$AB = 24 \text{ cm} \Rightarrow AO = OB = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}$$

$$G = R + 3 \Rightarrow VB = VO + 3$$

În $\triangle VOB$ dreptunghic aplic T.P.:

$$VB^2 = VO^2 + OB^2 \Rightarrow (VO + 3)^2 = VO^2 + 12^2$$

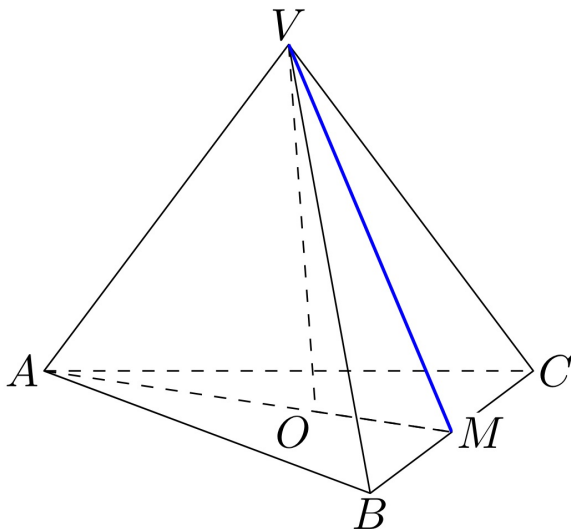
Obs. 1 $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$\Rightarrow (VO + 3)^2 = VO^2 + 2 \cdot 3 \cdot VO + 3^2 = VO^2 + 6 \cdot VO + 9 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{dar, } (VO + 3)^2 = VO^2 + 12^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{VO^2} + 6 \cdot VO + 9 = \cancel{VO^2} + 12^2 \Rightarrow 6 \cdot VO + 9 = 144 - 9$$

$$6 \cdot VO = 135 : 6 \Rightarrow VO = \frac{135}{6} = 22,5 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. O piramidă triunghiulară regulată $VABC$ are latura bazei $AB = 12 \text{ cm}$ și apotema piramidei $VM = 4 \text{ cm}$. Calculați lungimea înălțimii VO a piramidei.



$\triangle ABC$ echilateral

$\Rightarrow O$ - centru de greutate

$$\Rightarrow OM = \frac{1}{3} \cdot AM$$

$\triangle ABC$ echilateral $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow AM \text{ înălțime} \\ AM \text{ mediană} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AM = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

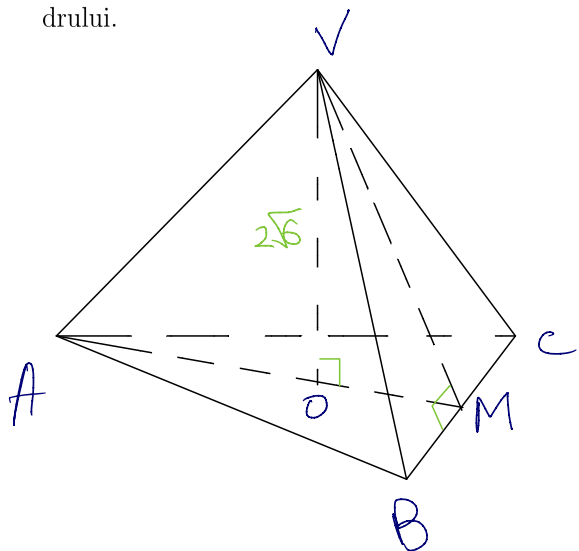
$$\Rightarrow OM = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$VO \perp (ABC) \quad \left. \begin{array}{l} \\ OM \in (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow VO \perp OM$$

În $\triangle VOM$ dreptunghic aplic T.P.: $VM^2 = VO^2 + OM^2 \Rightarrow VO^2 = VM^2 - OM^2$

$$VO^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 = 16 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow VO = \sqrt{4} \Rightarrow VO = 2 \text{ cm}$$

Exercițiul 7. Înălțimea unui tetraedru regulat este egală cu $2\sqrt{6}$ cm. Calculați lungimea muchiei tetraedrului.



Obs. Într-un tetraedru regulat, toate muchiile sunt egale. Deci, putem afla oricare dintre VA, VB, VC, AB, BC, AC .

Notăm muchia cu l .

$\triangle ABC$ echilateral $\Rightarrow AM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

O - centru de greutate $\Rightarrow OM = \frac{1}{3} \cdot AM$

$$\Rightarrow OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$$BM = MC = \frac{BC}{2} = \frac{l}{2}$$

$\triangle VBC$ echilateral $\Rightarrow VM \perp BC$

VM mediană

În $\triangle VMB$ dreptunghic aplic T.P.: $VB^2 = VM^2 + MB^2$

$$\Rightarrow l^2 = VM^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow VM^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$\Rightarrow VM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

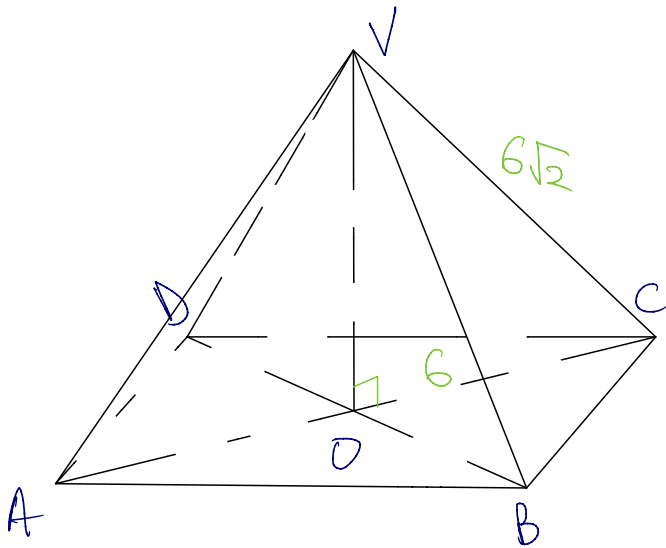
În $\triangle VOM$ dreptunghic aplic T.P.: $VM^2 = VO^2 + OM^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (2\sqrt{6})^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 \Rightarrow \frac{3l^2}{4} - \frac{3l^2}{36} = 4 \cdot 6$$

$$\Rightarrow \frac{27l^2 - 3l^2}{36} = 24 \Rightarrow \frac{24l^2}{36} = 24 \quad | :24 \Rightarrow \frac{l^2}{36} = 1$$

$$\Rightarrow l^2 = 36 \Rightarrow l = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

Exercițiul 8. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are toate cele 8 muchii congruente (muchii laterale sunt egale cu muchiile bazei). Știind că suma lungimilor tuturor muchiilor este $48\sqrt{2}$ cm, calculați înălțimea piramidei.



$$8 \cdot m = 48\sqrt{2} \quad | :8$$

$$m = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$ABCD \text{ pătrat} \Rightarrow AC = m\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}$$

$$AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$VC = m = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} VO \perp (ABCD) \\ OC \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow VO \perp OC$$

$$\text{În } \triangle VOC \text{ dreptunghic aplic T.P.: } VC^2 = VO^2 + OC^2$$

$$\Rightarrow VO^2 = VC^2 - OC^2 = (6\sqrt{2})^2 - 6^2 = 72 - 36 = 36$$

$$\Rightarrow VO = \sqrt{36} \Rightarrow VO = 6 \text{ cm}$$