

Lecția 6 – Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan. Dreapta paralelă cu un plan

Clasa a 8-a – Capitolul 3 – Geometrie în spațiu



Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind teoremele de paralelism:

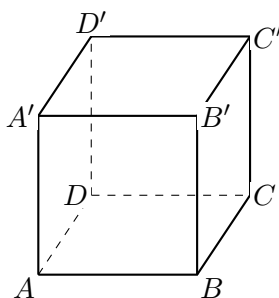
- O dreaptă este **paralelă cu un plan** dacă este paralelă cu o dreaptă inclusă în acel plan.
- Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α , și un plan β conține dreapta d și intersectează α după dreapta g , atunci $d \parallel g$.

Durata recomandată: **45–50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$. Stabiliți poziția relativă a următoarelor drepte față de planele specificate (inclusă, secantă sau paralelă):

- Dreapta $A' B'$ față de planul (ABC) .
- Dreapta AC față de planul (ABC) .
- Dreapta $A' A$ față de planul (ABC) .

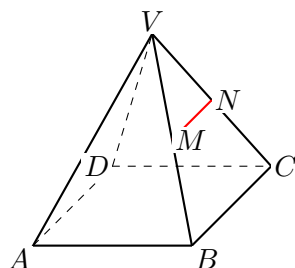


Exercițiul 2. Fie prisma regulată $ABCA' B' C'$. Fie M mijlocul laturii AB și N mijlocul laturii AC . Arătați că dreapta MN este paralelă cu planul (BCC') .

Exercițiul 3. Fie prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții (A sau F):

- (a) Dreapta $A'C'$ este paralelă cu planul bazei (ABC) . (---)
- (b) Dreapta BB' este paralelă cu planul bazei (ABC) . (---)
- (c) Dreapta $B'C'$ este inclusă în planul (ABC) . (---)

Exercițiul 4. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor VB , respectiv VC . Demonstrați că dreapta MN este paralelă cu planul bazei (ABC) .



Exercițiul 5. Fie tetraedrul $ABCD$. Se iau punctele $P \in AD$ și $R \in BD$ astfel încât $\frac{AP}{AD} = \frac{BR}{BD} = \frac{1}{3}$. Arătați că dreapta PR este paralelă cu planul (ABC) .

Exercițiul 6. În cubul $ABCD A'B'C'D'$, arătați că diagonala $B'D'$ este paralelă cu planul (ABC) .

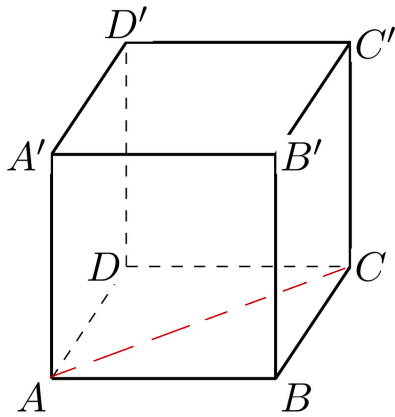
Exercițiul 7. Fie piramida triunghiulară $VABC$. Fie G_1 centrul de greutate al feței VAB și G_2 centrul de greutate al feței VAC . Demonstrați că dreapta G_1G_2 este paralelă cu planul (ABC) .

Exercițiul 8. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$. Fie M mijlocul diagonalei AB' și N mijlocul diagonalei BC' . Arătați că dreapta MN este paralelă cu planul (ABC) .

Succes!

Exercițiul 1. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$. Stabiliți poziția relativă a următoarelor drepte față de planele specificate (inclusă, secantă sau paralelă):

- Dreapta $A'B'$ față de planul (ABC) .
- Dreapta AC față de planul (ABC) .
- Dreapta $A'A$ față de planul (ABC) .



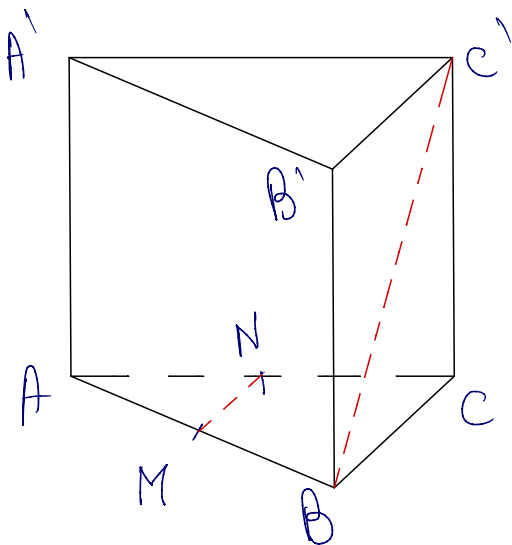
$$a) \left. \begin{array}{l} A'B' \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow A'B' \parallel (ABC) \Rightarrow \text{paralelă}$$

$$b) AC \subset (ABC) \Rightarrow \text{inclusă}$$

$$c) A'A \cap (ABC) = \{A\} \Rightarrow \text{secantă}$$

$\hookrightarrow A'A$ intersectează planul (ABC) în punctul A .

Exercițiul 2. Fie prisma regulată $ABCA' B' C'$. Fie M mijlocul laturii AB și N mijlocul laturii AC . Arătați că dreapta MN este paralelă cu planul (BCC') .



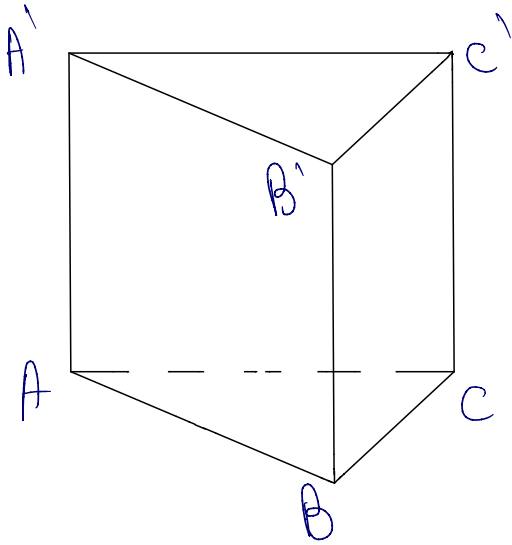
În $\triangle ABC$:

$$\left. \begin{array}{l} AM = MB \\ AN = NC \end{array} \right\} \Rightarrow MN \text{ linie mijlocie în } \triangle ABC$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow MN \parallel BC \\ BC \subset (BCC') \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (BCC')$$

Exercițiul 3. Fie prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții (A sau F):

- (a) Dreapta $A'C'$ este paralelă cu planul bazei (ABC). (A)
 (b) Dreapta BB' este paralelă cu planul bazei (ABC). (F)
 (c) Dreapta $B'C'$ este inclusă în planul (ABC). (F)



a) **Adevărat**

$$\left. \begin{array}{l} A'C' \parallel AC \\ AC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow A'C' \parallel (ABC)$$

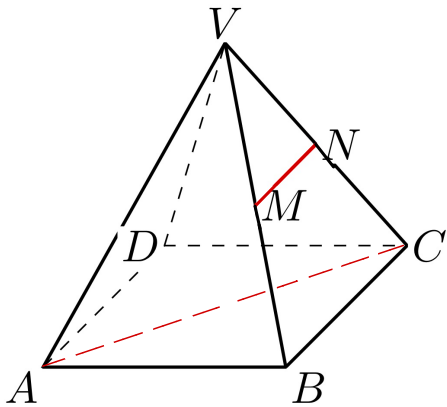
b) **Fals, este secantă**

$$BB' \cap (ABC) = \{B\}$$

c) **Fals, este paralelă**

$$\left. \begin{array}{l} B'C' \parallel BC \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow B'C' \parallel (ABC)$$

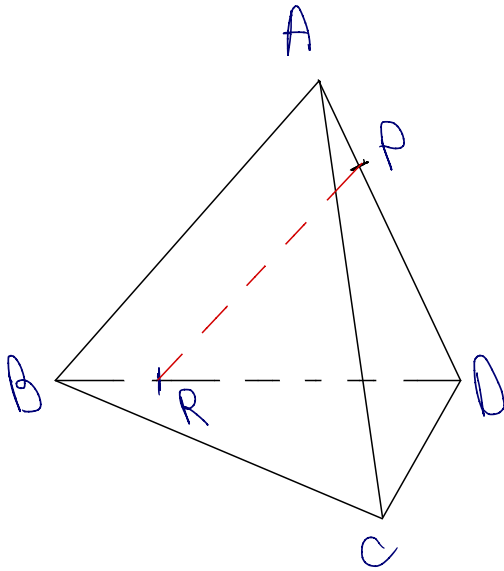
Exercițiul 4. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor VB , respectiv VC . Demonstrați că dreapta MN este paralelă cu planul bazei (ABC).



$$\left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle VBC: VM = MB \\ VN = NC \end{array} \right\} \Rightarrow MN \text{ linie mijlocie în } \triangle VBC \Rightarrow MN \parallel BC \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \text{Dar, } BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MN \parallel (ABC)$$

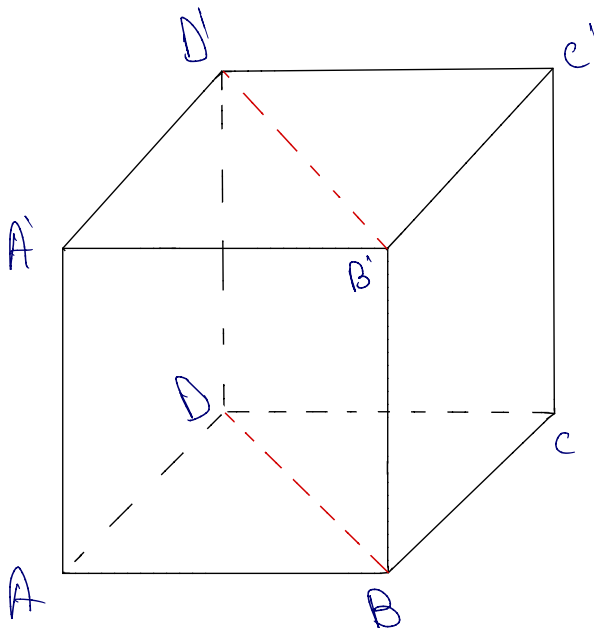
Exercițiul 5. Fie tetraedrul $ABCD$. Se iau punctele $P \in AD$ și $R \in BD$ astfel încât $\frac{AP}{AD} = \frac{BR}{BD} = \frac{1}{3}$.
Arătați că dreapta PR este paralelă cu planul (ABC) .



În $\triangle ABD$, avem $\frac{AP}{AD} = \frac{BR}{BD} = \frac{1}{3}$. Conform **Reciprocii Teoremei lui Thales** $\Rightarrow PR \parallel AB$

$\left. \begin{array}{l} PR \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow PR \parallel (ABC)$

Exercițiul 6. În cubul $ABCD A' B' C' D'$, arătați că diagonala $B' D'$ este paralelă cu planul (ABC) .



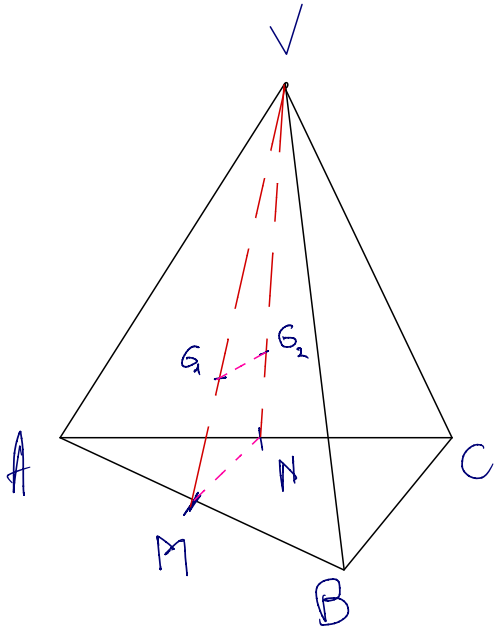
$\left. \begin{array}{l} B'B \parallel D'D \\ B'B = D'D \end{array} \right\} \Rightarrow B'B D D' \text{ paralelogram}$

$\Rightarrow B'D' \parallel BD$

$\left. \begin{array}{l} BD \subset (ABCD) \\ (ABCD) = (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow BD \subset (ABC)$

$\Rightarrow B'D' \parallel (ABC)$

Exercițiul 7. Fie piramida triunghiulară $VABC$. Fie G_1 centrul de greutate al feței VAB și G_2 centrul de greutate al feței VAC . Demonstrați că dreapta G_1G_2 este paralelă cu planul (ABC) .



Obs | Ne reamintim ce înseamnă centrul de greutate al unui triunghi:
 → punctul de intersecție al medianelor
 → situat pe orice mediană la $\frac{1}{3}$ de bază și $\frac{2}{3}$ de vârf

Fie M mijlocul $[AB]$ și N mijlocul $[AC]$.

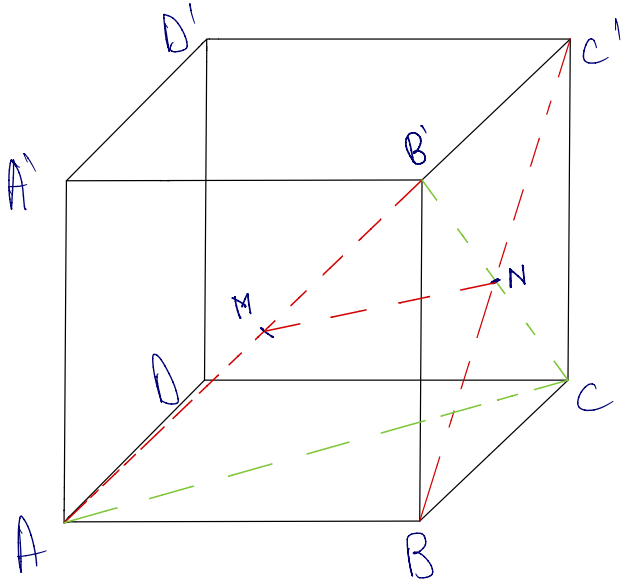
$$\left. \begin{array}{l} VM \text{ mediană în } \triangle VAB \\ G_1 \text{ centru de greutate} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{VG_1}{VM} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} VN \text{ mediană în } \triangle VAC \\ G_2 \text{ centru de greutate} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{VG_2}{VN} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

În $\triangle VMN$, din relațiile (1) și (2), folosind **Reciprocă**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Teorema lui Thales} \\ \Rightarrow G_1G_2 \parallel MN \\ MN \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABC)$$

Exercițiul 8. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$. Fie M mijlocul diagonalei AB' și N mijlocul diagonalei BC' . Arătați că dreapta MN este paralelă cu planul (ABC) .



Unim B' cu C și A cu C .

În pătratul $BCC'B'$: $BN = NC'$
 BC' diagonală } $\Rightarrow BC' \cap B'C = \{N\}$
 (Deoarece, în pătrat, punctul de intersecție al diagonalelor reprezintă mijlocul fiecărei diagonale)

În $\triangle B'AC$: $B'M = MA$
 $B'N = NC$ } $\Rightarrow MN$ linie mijlocie în $\triangle B'AC$

$\Rightarrow MN \parallel AC$
 $AC \subset (ABC)$ } $\Rightarrow MN \parallel (ABC)$