

Lecția 3 - Linia mijlocie în triunghi

Clasa a 7-a – Capitolul 1 - Geometrie

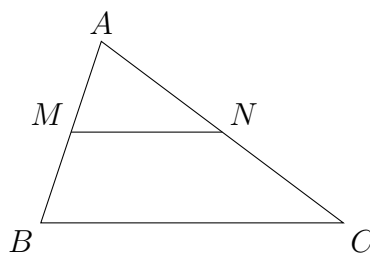
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile pe baza definiției liniei mijlocii, a teoremelor referitoare la aceasta și a proprietăților centrului de greutate. Durata recomandată: **45 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră triunghiul ABC cu latura $BC = 18$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB , respectiv AC .

- Calculează lungimea segmentului MN .
- Dacă perimetrul triunghiului AMN este de 20 cm, calculează perimetrul triunghiului ABC .



a)

M - mijlocul lui AB
 N - mijlocul lui AC } $\Rightarrow MN$ - linie mijlocie în $\triangle ABC$

Conform teoremei liniei mijlocii, $MN \parallel BC$ și $MN = \frac{BC}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} MN = \frac{BC}{2} \\ BC = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow MN = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}$$

b)

M, N - mijloacele lui AB , respectiv $AC \Rightarrow AM = \frac{AB}{2}$ și $AN = \frac{AC}{2}$

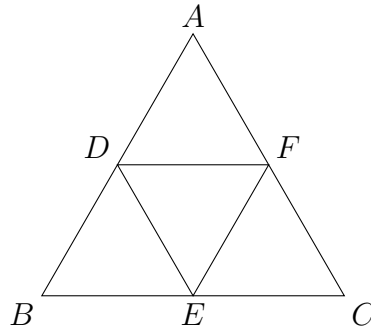
$MN = \frac{BC}{2}$ (de la punctul a)

$$P_{\triangle AMN} = AM + MN + NA$$

$$P_{\triangle AMN} = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} \quad | \cdot 2^1$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 P_{\triangle AMN} = AB + BC + AC \\ P_{\triangle ABC} = AB + BC + CA \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P_{\triangle ABC} = 2 P_{\triangle AMN} \\ P_{\triangle ABC} = 2 \cdot 20 \\ P_{\triangle ABC} = 40 \text{ cm} \end{array}$$

Exercițiul 2. Fie triunghiul echilateral ABC . Punctele D, E și F sunt mijloacele laturilor AB, BC , respectiv AC . Știind că perimetrul triunghiului DEF este egal cu 15 cm, determină lungimea laturii AB a triunghiului mare.



$\triangle ABC$ - echilateral $\Rightarrow AB = AC = BC$

$$D, E, F - \text{mijloacele lui } AB, BC \text{ și } AC \Rightarrow \begin{cases} AD = DB = \frac{AB}{2} & (1) \\ BE = EC = \frac{BC}{2} & (2) \\ AF = FC = \frac{AC}{2} & (3) \end{cases}$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow DE, EF, FD$ sunt linii mijlocii $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} DE \parallel AB, DE = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2 \cdot DE & (4) \\ EF \parallel BC, EF = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2 \cdot EF & (5) \\ FD \parallel AC, FD = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2 \cdot FD & (6) \end{cases}$$

Știm că $AB = AC = BC \Rightarrow \cancel{2DE} = \cancel{2EF} = \cancel{2FD}$
 Din (4), (5), (6) $\checkmark \quad DE = EF = FD \Rightarrow \triangle DEF$ - echilateral

$$P_{\triangle DEF} = DE + EF + FD$$

$$P_{\triangle DEF} = 3DE \quad | :3$$

$$DE = \frac{P_{\triangle DEF}}{3} = \frac{15}{3} = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Dar } DE = \frac{AB}{2}$$

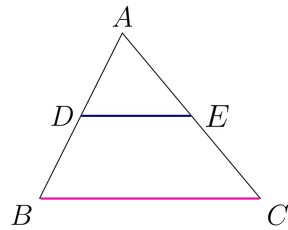
$$AB = 2 \cdot DE$$

$$AB = 2 \cdot 5$$

$$AB = 10 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. În triunghiul ABC , punctul D este mijlocul laturii AB . Prin D se duce o paralelă la latura BC care intersectează latura AC în punctul E .

- (a) Arată că E este mijlocul laturii AC .
 (b) Dacă $AC = 14$ cm, calculează lungimea segmentului EC .



a)

Reciprocă Teoremei liniei mijlocii:

Dreapta (DE) care trece prin mijlocul unei laturi $(DE \cap AB)$ și este paralelă cu a doua latură $(DE \parallel BC)$, trece prin mijlocul celei de-a treia laturi $(E \in AC)$

În $\triangle ABC$:
 D - mijlocul lui AB
 $DE \parallel BC, E \in AC$ } $\Rightarrow E$ - mijlocul lui AC

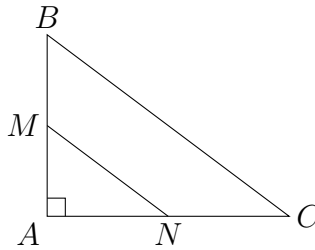
b)

$$E \text{ - mijlocul lui } AC \Rightarrow AE = EC = \frac{AC}{2}$$

$$\begin{aligned} EC &= \frac{AC}{2} \\ AC &= 14 \text{ cm} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} EC &= \frac{AC}{2} \\ AC &= 14 \text{ cm} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow EC = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$. Catetele au lungimile $AB = 12$ cm și $AC = 16$ cm. Fie M mijlocul lui AB și N mijlocul lui AC .

- Calculează lungimea ipotenuzei BC .
- Determină lungimea liniei mijlocii MN .
- Calculează perimetrul trapezului $MNCB$.



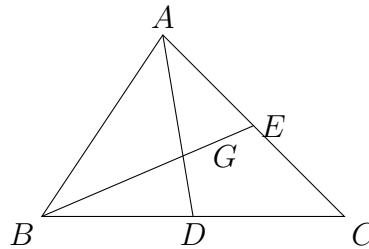
$$\begin{aligned}
 a) \quad \triangle ABC : \quad m(\angle A) = 90^\circ & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{lui Pitagora} \end{array} \right. \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \\
 & \quad BC^2 = 12^2 + 16^2 \\
 & \quad BC^2 = 144 + 256 \\
 & \quad \sqrt{BC^2} = \sqrt{400} \\
 & \quad BC = 20 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & \begin{array}{l} M - \text{mijlocul lui } AB \\ N - \text{mijlocul lui } AC \end{array} \quad \Rightarrow \quad MN - \text{linie mijlocie} \Rightarrow MN \parallel BC, \quad MN = \frac{BC}{2} \\
 & \quad MN = \frac{BC}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} BC = 20 \text{ cm} \end{array} \right. \Rightarrow MN = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad & MN \parallel BC \Rightarrow MNCB - \text{trapez} \\
 & M - \text{mijlocul lui } AB \Rightarrow AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm} \\
 & N - \text{mijlocul lui } AC \Rightarrow AN = NC = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm} \\
 & P_{MNCB} = MN + NC + CB + BM \\
 & P_{MNCB} = 10 + 8 + 20 + 6 \\
 & P_{MNCB} = 44 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Exercițiul 5. În triunghiul ABC , AD și BE sunt mediane ($D \in BC, E \in AC$), iar G este centrul de greutate al triunghiului. Se știe că $AD = 15$ cm și $BG = 8$ cm.

- (a) Calculează lungimea segmentelor AG și GD .
 (b) Calculează lungimea medianei BE .



a)

Centrul de greutate se află la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază pe fiecare mediană!

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: \\ AD - \text{mediană} \\ G - \text{centru de greutate} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} AG &= \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \cdot 15 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm} \\ GD &= \frac{1}{3} AD = \frac{1}{3} \cdot 15 = 1 \cdot 5 = 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

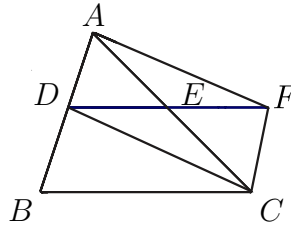
b)

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: \\ BE - \text{mediană} \\ G - \text{centru de greutate} \end{array} \right\} \Rightarrow BG = \frac{2}{3} BE \Rightarrow 3BG = 2BE \quad | :2 \\ BE = \frac{3BG}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} BE = \frac{3BG}{2} \\ BG = 8 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow BE = \frac{3 \cdot 8}{2} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. Fie D și E mijloacele laturilor AB , respectiv AC ale triunghiului ABC .
Fie F simetricul punctului D față de punctul E .

- (a) Demonstrează că patrulaterul $ADCF$ este un paralelogram.
(b) Arată că $FC \parallel AB$ și $FC = \frac{1}{2}AB$.



a)
 F - simetricul lui D față de $E \Rightarrow E$ - mijlocul lui $DF \Rightarrow DE = EF = \frac{DF}{2}$
 E - mijlocul lui $AC \Rightarrow AE = EC = \frac{AC}{2}$

Dacă într-un patrulater diagonalele se înjumătățesc, atunci patrulaterul este dreptunghi.

$$\left. \begin{array}{l} ADCF - \text{patrulater} \\ DE = EF = \frac{DF}{2}, DF - \text{diagonală} \\ AE = EC = \frac{AC}{2}, AC - \text{diagonală} \end{array} \right\} \Rightarrow ADCF - \text{paralelogram}$$

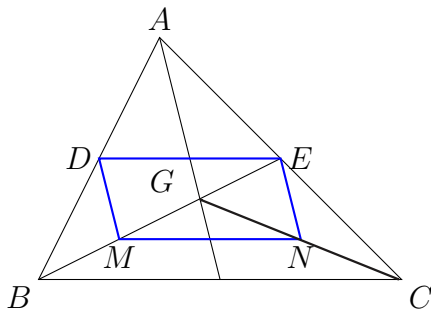
b)
 $ADCF - \text{paralelogram} \Rightarrow FC \parallel AD$ și $FC = AD \} \Rightarrow FC \parallel AB$
 Dar $D \in AB$

$$\left. \begin{array}{l} D - \text{mijlocul lui } AB \Rightarrow AD = \frac{AB}{2} \\ FC = AD \end{array} \right\} \Rightarrow FC = \frac{AB}{2}$$

Exercițiul 7. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Notăm cu M mijlocul segmentului BG și cu N mijlocul segmentului CG . Fie D și E mijloacele laturilor AB , respectiv AC .

(a) Demonstrează că $MN \parallel BC$ și calculează MN în funcție de BC .

(b) Arată că patrulaterul $MNED$ este un paralelogram.



a)

În $\triangle GBC$:

M - mijlocul lui BG
 N - mijlocul lui GC

$\left. \begin{array}{l} M - \text{mijlocul lui } BG \\ N - \text{mijlocul lui } GC \end{array} \right\} \Rightarrow MN - \text{linie mijlocie în } \triangle GBC \Rightarrow MN \parallel BC \text{ și } MN = \frac{BC}{2}$

b)

În $\triangle ABC$:

D - mijlocul lui AB
 E - mijlocul lui AC

$\left. \begin{array}{l} D - \text{mijlocul lui } AB \\ E - \text{mijlocul lui } AC \end{array} \right\} \Rightarrow DE - \text{linie mijlocie în } \triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC \text{ și } DE = \frac{BC}{2}$

$MN \parallel BC$
 $DE \parallel BC$

$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC \\ DE \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow DE \parallel MN$

$DE = \frac{BC}{2}$
 $MN = \frac{BC}{2}$

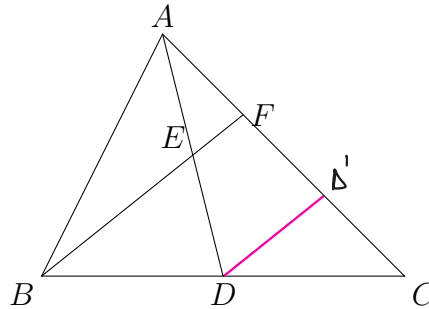
$\left. \begin{array}{l} DE = \frac{BC}{2} \\ MN = \frac{BC}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow DE = MN$

Un patrulater cu 2 laturi opuse și congruente este paralelogram.

$MNDE$ - patrulater
 $DE \parallel MN$
 $DE = MN$

$\left. \begin{array}{l} MNDE - \text{patrulater} \\ DE \parallel MN \\ DE = MN \end{array} \right\} \Rightarrow MNDE - \text{paralelogram}$

Exercițiul 8. În triunghiul ABC , fie AD mediana corespunzătoare laturii BC ($D \in BC$). Fie E mijlocul segmentului AD . Dreapta BE intersectează latura AC în punctul F . Demonstrează că $AF = \frac{1}{3}AC$. (Indiciu: Construiește prin D o paralelă la BF).



construim prin D o paralelă la BF :
 $D' \in AC, DD' \parallel BF$

AD - mediană $\Rightarrow BD = DC = \frac{BC}{2}$ (mijloc)

În $\triangle CBF$:
 D - mijlocul lui BC
 $DD' \parallel BF$ } $\Rightarrow FD' = D'C$
Reciprocă Teoremei liniei mijlocii

În $\triangle ADD'$:
 E - mijlocul lui AD
 $EF \parallel DD'$ } $\Rightarrow AF = FD'$
Reciprocă Teoremei liniei mijlocii

$FD' = D'C$
 $FD' = AF$ } $\Rightarrow D'C = AF = FD'$

$$AC = AF + FD' + D'C$$

$$AC = 3AF \quad |:3$$

$$AF = \frac{1}{3} AC$$