

Lecția 4 - Dreptunghiul

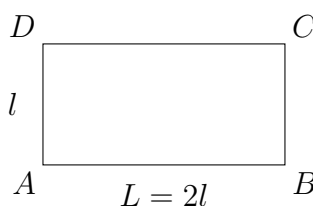
Clasa a 7-a – Capitolul 1 - Geometrie

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile de mai jos folosind proprietățile dreptunghiului (laturi paralele și congruente, unghiuri drepte, diagonale congruente care se înjumătățesc). Durata recomandată: **45 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Un dreptunghi are lățimea egală cu jumătate din lungime. Știind că perimetrul dreptunghiului este egal cu 36 cm, determină lungimile laturilor acestuia.



Fie ABCD - dreptunghi

Solu:

Într-un dreptunghi:

$$P = 2(L + l), \quad L = \text{lungimea}$$

$$l = \text{lățimea}$$

Din ipoteză, $l = \frac{L}{2}$

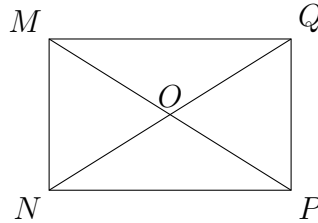
$$P = 36 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} P = 2(L + l) \\ l = \frac{L}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P = 2(L + \frac{L}{2}) \\ P = 2(\frac{2L + L}{2}) \end{array}$$

$$P = \cancel{2} \cdot \frac{3L}{\cancel{2}} \Rightarrow P = 3L \Rightarrow L = \frac{P}{3} = \frac{36}{3} = 12 \text{ cm}$$

$$l = \frac{L}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

Exercițiul 2. În dreptunghiul $MNPQ$, punctul O este intersecția diagonalelor. Dacă măsura unghiului MON este de 120° și lungimea diagonalei MP este de 10 cm, determină măsura unghiului OMN .



Dreptunghiul este un paralelogram cu câteva proprietăți în plus:

- diagonalele sunt congruente (și se înjumătățesc)
- unghiurile sunt drepte și congruente.

$$MNPQ - \text{dreptunghi} \Rightarrow MO = OP = \frac{MP}{2} = NO = OQ = \frac{NQ}{2} \Rightarrow \frac{MP}{2} = \frac{NQ}{2} \Rightarrow$$

$$\} \text{și } MP = NQ$$

$$\Rightarrow MP = NQ = 10 \text{ cm}$$

$$\Delta MON: \} \Rightarrow \Delta MON - \text{isoscel} \Rightarrow m(\angle OMN) = m(\angle ONM)$$

$$MO = NO$$

$$m(\angle OMN) + m(\angle ONM) + m(\angle MON) = 180^\circ$$

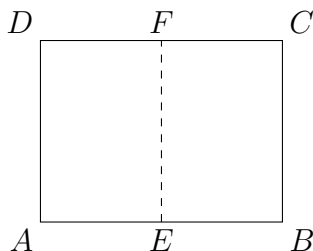
$$2m(\angle OMN) + 120^\circ = 180^\circ \quad / -120^\circ$$

$$2m(\angle OMN) = 60^\circ \quad / :2$$

$$m(\angle OMN) = 30^\circ$$

Exercițiul 3. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Fie E mijlocul laturii AB și F mijlocul laturii CD .

- Demonstrează că patrulaterul $AEFD$ este un dreptunghi.
- Dacă $AD = 6$ cm și $AB = 8$ cm, calculează perimetrul dreptunghiului $AEFD$.



a)

$ABCD$ -dróptunghi $\Rightarrow AD \parallel BC$ og $AB \parallel DC$, $AD = BC$, $AB = DC$

$$AD \parallel CB, E \in AB, F \in DC \Rightarrow AE \parallel DF$$
$$\begin{array}{l} AB = CD \\ E, F - \text{mijloace} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow AE = EB = \frac{1}{2} \cdot AB \\ \Rightarrow DF = FC = \frac{1}{2} \cdot CD \end{array} \right\} \Rightarrow AE = DF$$
$$AE \parallel DF \quad \wedge \quad AE = DF \Rightarrow AEDF - \text{parallelogram}$$

b)

$$AE = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

AEFD - dreptunghi $\Rightarrow \begin{cases} AE = DF = 4\text{cm} \\ AD = EF = 6\text{cm} \end{cases}$

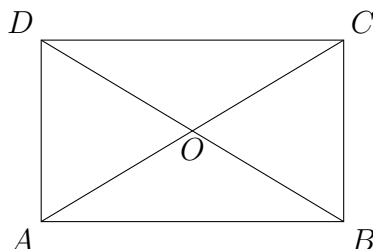
$$P_{AEFD} = 2AE + 2AD$$

$$P_{AEFD} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6$$

$$J_{AEFD} = 8 + 12$$

$$J_{AEFD} = 20 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. În dreptunghiul $ABCD$, diagonalele se intersectează în punctul O . Se știe că perimetrul triunghiului AOB este cu 2 cm mai mare decât perimetrul triunghiului BOC . Calculează diferența dintre lungimea și lățimea dreptunghiului ($AB - BC$).



$$ABCD - \text{dreptunghi} \Rightarrow OA = OB = OC = OD$$

$$P_{\triangle AOB} = AO + OB + BA$$

$$P_{\triangle BOC} = BO + OC + CB$$

$$P_{\triangle AOB} = P_{\triangle BOC} + 2$$

Înlocuim în ultima relație perimetrele celor 2 triunghiuri.

$$\cancel{AO} + \cancel{OB} + BA = \cancel{BO} + OC + CB + 2$$

$$AO + BA = OC + CB + 2$$

Deoarece $AO = OC$, putem simplifica.

$$\cancel{AO} + BA = \cancel{OC} + CB + 2$$

$$BA = CB + 2 \quad / - CB$$

$$BA - CB = 2$$

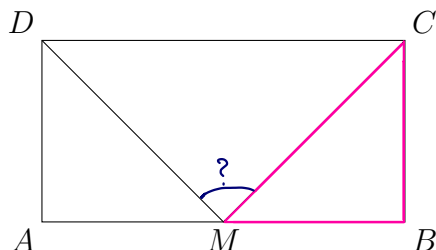
Adică:

$$AB - BC = 2$$

Exercițiul 5. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 2 \cdot BC$. Fie M mijlocul laturii AB .

(a) Arată că triunghiul BMC este dreptunghic isoscel.

(b) Calculează măsura unghiului DMC .



a)

$ABCD$ - dreptunghi $\Rightarrow m(\angle B) = 90^\circ \Rightarrow \triangle BMC$ - dreptunghic în B

Rămâne să demonstrăm că $\triangle BMC$ este și isoscel.

M - mijlocul lui $AB \Rightarrow AM = MB = \frac{AB}{2}$

$AB = 2BC \Rightarrow BC = \frac{1}{2} AB$

Tar $BM = \frac{1}{2} AB$

$\left. \begin{array}{l} BC = \frac{1}{2} AB \\ BM = \frac{1}{2} AB \end{array} \right\} \Rightarrow BC = BM \Rightarrow \triangle BMC$ - isoscel

$\triangle BMC$ - dreptunghic $\Rightarrow \triangle BMC$ - dreptunghic isoscel

$\triangle BMC$ - isoscel

b)

$\triangle BMC$ - dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\angle BCM) = m(\angle BMC)$

$m(\angle BCM) + m(\angle BMC) + m(\angle MBC) = 180^\circ$

sunt egale

90°

$2m(\angle BCM) + 90^\circ = 180^\circ \quad | - 90^\circ$

$2m(\angle BCM) = 90^\circ \quad | : 2$

$m(\angle BCM) = 45^\circ \Rightarrow m(\angle BMC) = 45^\circ$

Analog, considerăm $\triangle ADM$

$AD = BC$

$AM = \frac{1}{2} AB = BC$

$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ AM = BC \end{array} \right\} \Rightarrow AD = AM$

$m(\angle MAD) = 90^\circ$ ($ABCD$ - dreptunghi)

$\Rightarrow$

$\triangle ADM$ - dreptunghic în A și isoscel

Obs.: Unghiul $\angle DMC$ este format pe linia dreaptă AB ($A-M-B$)

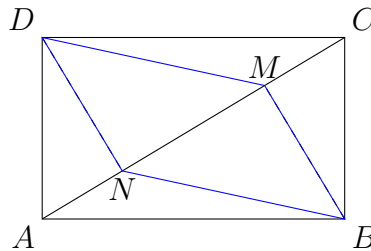
$m(\angle DMC) = 180^\circ - m(\angle AMD) - m(\angle BMC)$

$m(\angle DMC) = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ$

$m(\angle DMC) = 90^\circ$

Exercițiul 6. În dreptunghiul $ABCD$, se construiesc perpendicularele din vârfurile B și D pe diagonala AC . Notăm picioarele acestor perpendiculare cu M , respectiv N ($M \in AC, N \in AC$).

- (a) Demonstrează că triunghiurile ABM și CDN sunt congruente.
 (b) Arată că patrulaterul $BNDM$ este un paralelogram.



a)

$$\left. \begin{array}{l} BM \perp AC, M \in AC \Rightarrow m(\angle AMB) = 90^\circ \\ DN \perp AC, N \in AC \Rightarrow m(\angle CND) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABM \text{ și } \Delta CDN \text{ sunt dreptunghice}$$

considerăm ΔABM și ΔCDN

$$\left. \begin{array}{l} AB \equiv CD \text{ (laturi opuse în dreptunghi)} \\ \angle BAM \equiv \angle DCN \text{ (alterne interne din } AB \parallel DC \text{ cu } AC \text{ - secantă)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{i.u.} \\ \Rightarrow \\ \Delta ABM \equiv \Delta CDN \end{array}$$

b)

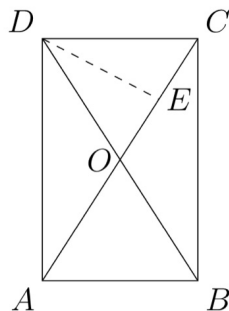
$$\Delta ABM \equiv \Delta CDN \Rightarrow \left. \begin{array}{l} BM \equiv DN \\ AM \equiv CN \end{array} \right\} \Rightarrow BM \parallel DN$$

$$BM \perp AC \text{ și } DN \perp AC$$

Obs.: Două drepte perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele.

$$\left. \begin{array}{l} BNDM - \text{patrulater} \\ BM \parallel DN \\ BM = DN \end{array} \right\} \Rightarrow BNDM - \text{paralelogram}$$

Exercițiul 7. În dreptunghiul $ABCD$, se construiește înălțimea DE în triunghiul ADC ($E \in AC$). Dacă E este mijlocul segmentului OC , unde O este intersecția diagonalelor, demonstrează că $AB = \frac{AC}{2}$ (sau echivalent, măsura unghiului BAC este 60°).



$$\left. \begin{array}{l} \{O\} = AC \cap BD \\ ABCD - \text{dreptunghi} \end{array} \right\} \Rightarrow AO = OC = OD = OB$$

$$\left. \begin{array}{l} O - \text{mijlocul lui } AC \\ E - \text{mijlocul lui } OC \end{array} \right\} \Rightarrow OE = EC = \frac{1}{2} OC \quad \left. \begin{array}{l} OC = \frac{1}{2} AC \end{array} \right\} \Rightarrow OE = EC = \frac{1}{4} AC$$

$$\left. \begin{array}{l} OE = \frac{1}{2} OC \\ OC = OD \end{array} \right\} \Rightarrow OE = \frac{1}{2} OD \quad | \cdot 2$$

$$OD = 2OE$$

$$\Delta AOC: DE \perp OC, E \in OC \Rightarrow DE - \text{înălțime} \quad \left. \begin{array}{l} E - \text{mijlocul lui } OC \end{array} \right\} \Rightarrow DE - \text{mediană}$$

$$DE - \text{înălțime și mediană} \Rightarrow \Delta AOC - \text{isoscel cu } AO = AC$$

$$\left. \begin{array}{l} AO = OC \\ AO = AC \end{array} \right\} \Rightarrow AO = OC = AC \Rightarrow \Delta AOC - \text{echilateral}$$

Într-un triunghi echilateral, măsura fiecărui unghi este 60° .

$$m(\angle DCO) = 60^\circ$$

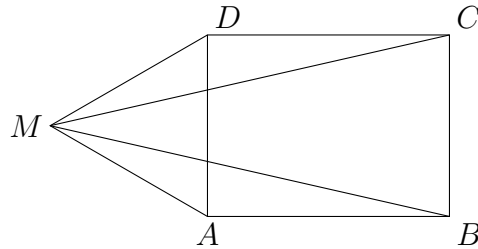
$$ABCD - \text{dreptunghi} \Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow \angle BAC \text{ și } \angle DCO \text{ sunt alternate interne}$$

$$m(\angle BAC) = m(\angle DCO) = 60^\circ$$

$$\Delta ABC: \left. \begin{array}{l} m(\angle B) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(60^\circ) = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \frac{1}{2} AC$$

Exercițiul 8. Fie $ABCD$ un dreptunghi și M un punct în exteriorul acestuia, astfel încât triunghiul AMD să fie echilateral.

- (a) Demonstrează că triunghiul MBC este isoscel.
 (b) Dacă $AB = AD$, calculează măsura unghiului BMC .



$$a) \quad m(\angle MAB) = m(\angle MAD) + m(\angle DAB)$$

$$\triangle MAD - \text{echilateral} \Rightarrow m(\angle MAD) = m(\angle ADM) = m(\angle AMD) = 60^\circ$$

$$ABCD - \text{dreptunghi} \Rightarrow m(\angle DAB) = 90^\circ, m(\angle ADC) = 90^\circ$$

$$m(\angle MAB) = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

$$m(\angle MAC) = m(\angle MAD) + m(\angle DAC)$$

$$m(\angle MAC) = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} m(\angle MAB) = 150^\circ \\ m(\angle MAC) = 150^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle MAB \equiv \angle MAC$$

$$\triangle AMD - \text{echilateral} \Rightarrow MA = MD = AD$$

$$ABCD - \text{dreptunghi} \Rightarrow AB = DC$$

considerăm $\triangle MAB$ și $\triangle MDC$

$$MA = MD$$

$$AB = DC$$

$$\angle MAB \equiv \angle MDC$$

$$\left. \begin{array}{l} MA = MD \\ AB = DC \\ \angle MAB \equiv \angle MDC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{L.U.L.}} \triangle MAB \equiv \triangle MDC \Rightarrow MB = MC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle MBC - \text{isoscel}$$

b)

$$AB = AD \Rightarrow ABCD - \text{pătrat}$$

$$\left. \begin{array}{l} MA = AD \\ AB = AD \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{AM = AB}_{150^\circ} \Rightarrow \triangle MAB - \text{isoscel} \Rightarrow m(\angle AMB) = m(\angle ABM)$$

$$m(\angle AMB) + m(\angle MAB) + m(\angle ABM) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle AMB) = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

$$MD = DC \Rightarrow \triangle MDC - \text{isoscel} \Rightarrow m(\angle DMC) = m(\angle DCM)$$

$$m(\angle DMC) + m(\angle DCM) + \underbrace{m(\angle MDC)}_{150^\circ} = 180^\circ \Rightarrow m(\angle DMC) = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

$$m(\angle BMC) = m(\angle AMD) - m(\angle AMB) - m(\angle DMC) = 60^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$