

Lecția 7 - Trapezul. Linia mijlocie

Clasa a 7-a – Capitolul 1 - Geometrie

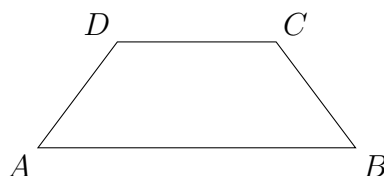
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile de mai jos folosind definiția trapezului, proprietățile trapezului isoscel (laturi neparalele și diagonale congruente) și formulele pentru linia mijlocie. Durata recomandată: **45 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Un trapez isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ are baza mare $AB = 12$ cm, baza mică $CD = 6$ cm și laturile neparalele $AD = BC = 5$ cm.

- Calculează perimetrul trapezului.
- Determină lungimea liniei mijlocii a trapezului.



a)

$$P_{\text{trapez}} = AB + BC + CD + DA$$

$$P_{\text{trapez}} = 12 + 5 + 6 + 5$$

$$P_{\text{trapez}} = 28 \text{ cm}$$

b)

$$l_m = \frac{B + b}{2}$$

$B =$ baza mare

$b =$ baza mică

$l_m =$ linia mijlocie

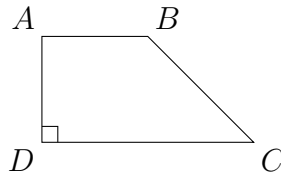
1

$$B = AB = 12 \text{ cm}$$

$$b = CD = 6 \text{ cm}$$

$$l_m = \frac{AB + CD}{2} = \frac{12 + 6}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}$$

Exercițiul 2. În trapezul dreptunghic $ABCD$ ($\angle A = \angle D = 90^\circ$), măsura unghiului C este triplul măsurii unghiului B . Află măsurile unghiurilor B și C .



$$m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ \quad (\text{în orice trapez, unghiurile alăturate laturilor paralele sunt suplementare})$$

$$m(\sphericalangle C) = 3m(\sphericalangle B)$$

$$3m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle B) = 180^\circ$$

$$4m(\sphericalangle B) = 180^\circ \quad / : 4$$

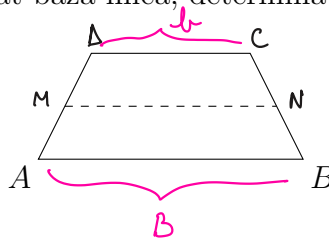
$$m(\sphericalangle B) = 45^\circ$$

$$m(\sphericalangle C) = 3m(\sphericalangle B)$$

$$m(\sphericalangle C) = 3 \cdot 45^\circ$$

$$m(\sphericalangle C) = 135^\circ$$

Exercițiul 3. Linia mijlocie a unui trapez are lungimea de 15 cm. Știind că baza mare este cu 6 cm mai lungă decât baza mică, determină lungimile celor două baze.



$$l_m = \frac{B+b}{2}$$

$$l_m = 15 \text{ cm}$$

$$B = b + 6$$

$$\frac{b+6+b}{2} = 15 \quad / \cdot 2$$

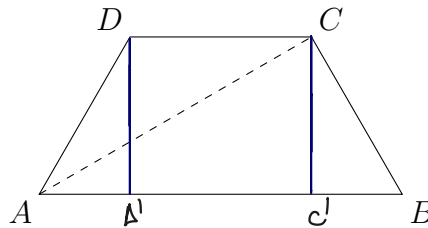
$$2b + 6 = 30 \quad / - 6$$

$$2b = 24 \quad / : 2$$

$$b = 12 \text{ cm} \Rightarrow B = 12 + 6 = 18 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Fie $ABCD$ un trapez isoscel ($AB \parallel CD, AB > CD$) cu $AD = DC = CB = 6$ cm și $\angle A = 60^\circ$.

- (a) Calculează lungimea bazei mari AB .
 (b) Determină lungimea diagonalei AC .



a)

Fie $AA' \perp AB, A' \in AB$ și $CC' \perp AB, C' \in AB$

$$\text{În } \triangle AA'D: \begin{matrix} m(\angle A') = 90^\circ \\ m(\angle A) = 60^\circ \end{matrix} \Rightarrow m(\angle ADA') = 30^\circ$$

Cateta opusă unghiului de 30° este $\frac{1}{2}$ din ipotenusa

$$AA' = \frac{AD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$\triangle CC'B: \begin{matrix} m(\angle C') = 90^\circ \\ m(\angle B) = 60^\circ \text{ (trapez isoscel)} \end{matrix} \Rightarrow m(\angle CCB') = 30^\circ$$

$$C'B = \frac{CB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$A'C' = DC = 6 \text{ cm}$$

$$AB = AA' + A'C' + C'B = 3 + 6 + 3 = 12 \text{ cm}$$

b)

$\triangle ADC: AD = DC = 6 \text{ cm} \Rightarrow \triangle ADC - \text{isoscel}$

$\angle ADC$ este suplementul lui $\angle A \Rightarrow m(\angle ADC) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$2 m(\angle DAC) + m(\angle ADC) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle DAC) = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$m(\angle CAB) = m(\angle DAB) - m(\angle DAC) = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

$$\triangle ABC: \begin{matrix} m(\angle A) = 30^\circ \\ m(\angle B) = 60^\circ \end{matrix} \Rightarrow m(\angle C) = 90^\circ$$

$$AC = AB \cdot \sin(60^\circ)$$

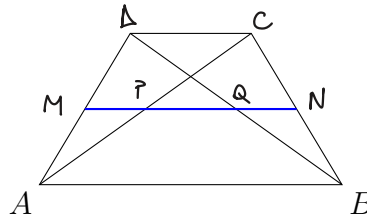
$$AC = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AC = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Exercițiul 5. În trapezul $ABCD$, M și N sunt mijloacele laturilor neparalele. Diagonalele AC și BD intersectează linia mijlocie MN în punctele P și Q . Dacă $AB = 20$ cm și $CD = 8$ cm:

(a) Calculează lungimea liniei mijlocii MN .

(b) Calculează lungimea segmentului PQ .



a)

MN - linie mijlocie

$$MN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{20 + 8}{2} = 14 \text{ cm}$$

b)

M - mijlocul lui AD

$\begin{cases} P \in MN \cap AC \\ MN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow MP \parallel CD \xRightarrow[\text{Teorema liniei mijlocii}]{\text{Reciproca}} P - \text{mijlocul lui } AC$

M, P - mijloacele lui AD și $AC \Rightarrow MP$ - linie mijlocie

$$MP = \frac{CD}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

$\begin{cases} Q \in MN \cap BD \\ MN \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel AB \xRightarrow[\text{Teorema liniei mijlocii}]{\text{Reciproca}} MQ - \text{linie mijlocie}$

$$MQ = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$$

$M-P-Q$ coliniare (toate sunt pe MN)

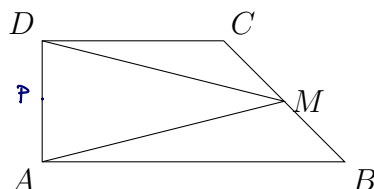
$$MQ = MP + PQ$$

$$PQ = MQ - MP$$

$$PQ = 10 - 4$$

$$PQ = 6 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic ($AB \parallel CD, \angle A = 90^\circ$) cu $AB = 10$ cm, $CD = 6$ cm și $AD = 4$ cm. Fie M mijlocul laturii BC . Demonstrează că triunghiul MAD este isoscel.



P - mijlocul înălțimii AD

Segmentul PM unește mijloacele laturilor neperpendicularabile, deci PM - linie mijlocie în trapez

$$PM \parallel AB \text{ și } PM \parallel CD$$

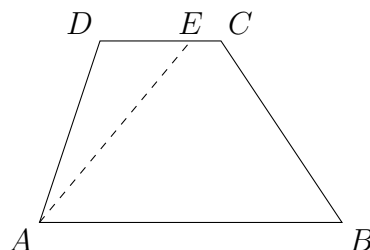
$$AD \perp AB \text{ și } PM \parallel AB \Rightarrow PM \perp AD$$

Dacă într-un triunghi înălțimea este și mediană, triunghiul este isoscel.

În $\triangle MAD$:
 PM - înălțime
 PM - mediană
 $\Rightarrow \triangle MAD$ - isoscel

Exercițiul 7. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), bisectoarea unghiului A intersectează latura CD în punctul E .

- (a) Demonstrează că triunghiul ADE este isoscel.
 (b) Dacă $AD = 6$ cm și $CD = 10$ cm, calculează lungimea segmentului EC .



a)

AE - bisectoare $\Rightarrow m(\angle DAE) = m(\angle EAB)$ (1)

$\left. \begin{array}{l} DC \parallel AB \\ AE - \text{secantă} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle DEA \equiv \angle EAB \text{ (alterne interne)} \quad (2)$

Din (1) și (2) $\Rightarrow m(\angle DAE) = m(\angle DEA) \Rightarrow \triangle ADE - \text{isoscel}$

b)

$\triangle ADE - \text{isoscel} \Rightarrow AD = DE = 6 \text{ cm}$

$E \in CD \Rightarrow DC = EC + ED$

$EC = DC - ED$

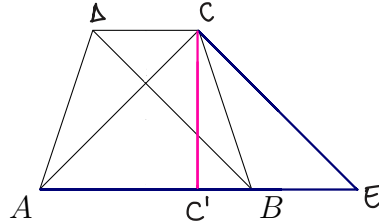
$EC = 10 - 6$

$EC = 4 \text{ cm}$

Exercițiul 8. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare ($AC \perp BD$).

(a) Demonstrează că înălțimea trapezului este egală cu linia mijlocie ($h = l_m$).

(b) Dacă aria trapezului este de 100 cm^2 , calculează înălțimea acestuia.



a)

Construim prin C o paralelă la BD care intersectează în punctul E.

$CE \parallel DB \Rightarrow DBEC$ - paralelogram $\Rightarrow CE = DB$
 $BE = CD$

$AC \perp BD$ și $BD \parallel CE \Rightarrow AC \perp CE \Rightarrow \triangle ACE$ - dreptunghi isoscel

Fie $CC' \perp AE$, $C' \in AE$

Într-un triunghi dreptunghi isoscel, înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este $\frac{1}{2}$ din ipotenuză.

$\triangle ACE$: $CC' \perp AE, C' \in AE \Rightarrow CC' = \frac{AE}{2} = \frac{AB + BE}{2} = \frac{AB + CD}{2}$

Dar $\frac{AB + CD}{2}$ este linia mijlocie. Deci $h = l_m$

b)

$$A_{\text{trapez}} = l_m \cdot h$$

$$l_m = h \text{ (de la a)}$$

$$A_{\text{trapez}} = h \cdot h = h^2 \quad 7$$

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{100} \Rightarrow h = 10 \text{ cm}$$