

Lecția 6 - Pătratul

Clasa a 7-a – Capitolul 1 - Geometrie

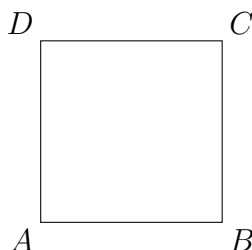
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile de mai jos folosind definiția și proprietățile pătratului (dreptunghi cu laturi egale, romb cu unghiuri drepte, diagonale congruente și perpendiculare). Durata recomandată: **45 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Un pătrat are perimetrul egal cu 24 cm.

- Calculează lungimea laturii pătratului.
- Dacă mărim latura pătratului cu 2 cm, cu cât crește perimetrul noului pătrat?



a)

$$ABCD - \text{pătrat} \Rightarrow AB = BC = CD = DA = l$$

$$P_{ABCD} = 4l \Rightarrow l = \frac{P_{ABCD}}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm}$$

b)

$$l' = l + 2$$

$$l' = 6 + 2$$

$$l' = 8 \text{ cm}$$

$$P_{ABCD} = 4l'$$

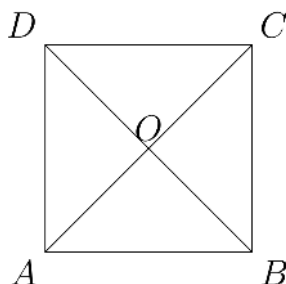
$$P_{ABCD} = 4 \cdot 8$$

$$P_{ABCD} = 32 \text{ cm}$$

$$\text{Perimetrul crește cu } 32 - 24 = 8 \text{ cm}$$

Exercițiul 2. În pătratul $ABCD$, diagonala AC are lungimea de 10 cm. Punctul O este intersecția diagonalelor.

- (a) Determină lungimea segmentului AO .
- (b) Calculează lungimea diagonalei BD și suma lungimilor celor două diagonale.



a)

Într-un pătrat, diagonalele sunt egale și se înjumătățesc

$$ABCD - \text{pătrat} \Rightarrow OA = OC = OB = OD = \frac{AC}{2}$$

$$OA = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

b)

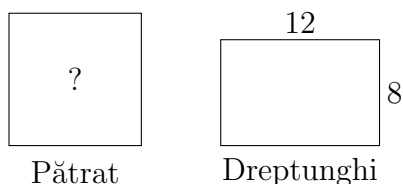
$$AC = BD = 10 \text{ cm}$$

Suma celor două diagonale:

$$AC + BD = 10 + 10 = 20 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. Un pătrat are același perimetru cu un dreptunghi care are lungimea de 12 cm și lățimea de 8 cm.

- (a) Calculează perimetrul dreptunghiului.
- (b) Determină lungimea laturii pătratului.



a)

$$P_{\text{dreptunghi}} = 2(L + l)$$

$$L = 12 \text{ cm}$$

$$l = 8 \text{ cm}$$

$$P_{\text{dreptunghi}} = 2(12 + 8) = 2 \cdot 20 = 40 \text{ cm}$$

b)

$$P_{\text{pătrat}} = P_{\text{dreptunghi}}$$

$$P_{\text{dreptunghi}} = 40 \text{ cm}$$

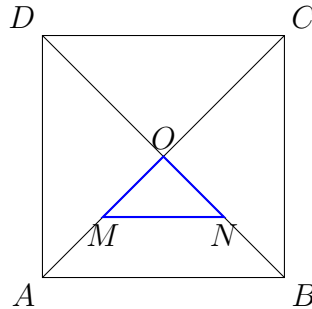
$$P_{\text{pătrat}} = 40 \text{ cm}$$

$$P_{\text{pătrat}} = 4l' \Rightarrow l' = \frac{P_{\text{pătrat}}}{4}$$

$$l' = \frac{40}{4} = 10 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. În pătratul $ABCD$, fie O punctul de intersecție al diagonalelor. Considerăm punctele M și N mijloacele segmentelor AO , respectiv BO .

- (a) Demonstrează că triunghiul MON este dreptunghic isoscel.
 (b) Arată că lungimea segmentului MN este jumătate din lungimea laturii pătratului ($MN = \frac{AB}{2}$).



a)

Diagonalele pătratului sunt perpendiculare și congruente

$$\left. \begin{array}{l} \{O\} = AC \cap BD \\ ABCD - \text{pătrat} \end{array} \right\} \Rightarrow AO \perp BO \text{ și } AO = BO$$

$$M - \text{mijlocul lui } AO \Rightarrow MA = MO = \frac{AO}{2}$$

$$N - \text{mijlocul lui } BO \Rightarrow NB = NO = \frac{BO}{2}$$

$$MO = \frac{AO}{2} \Rightarrow AO = 2MO$$

$$NO = \frac{BO}{2} \Rightarrow BO = 2NO$$

$$AO = BO \Rightarrow \cancel{2}MO = \cancel{2}NO \Rightarrow MO = NO \Rightarrow \triangle MON - \text{isoscel}$$

$$AO \perp BO \Rightarrow m(\angle MON) = 90^\circ \Rightarrow \triangle MON - \text{dreptunghic isoscel}$$

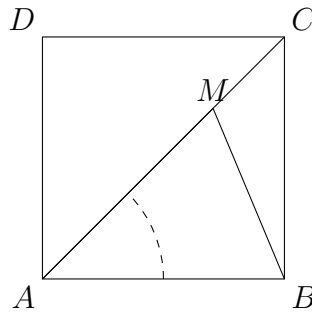
b)

$$\triangle ABO: M \text{ și } N - \text{mijloace} \Rightarrow MN - \text{linie mijlocie}$$

$$MN - \text{linie mijlocie} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} MN \parallel AB \\ MN = \frac{AB}{2} \end{array} \right\}$$

Exercițiul 5. Fie $ABCD$ un pătrat. Pe diagonala AC se consideră punctul M astfel încât lungimea segmentului AM să fie egală cu lungimea laturii AB ($AM = AB$).

- (a) Calculează măsura unghiului ABM .
- (b) Determină măsura unghiului MBC .



a)

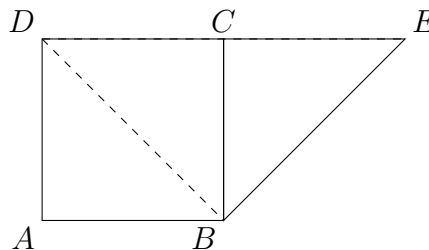
$$\begin{aligned}
 AM = AB &\Rightarrow \triangle AMB - \text{isoscel} \Rightarrow m(\angle AMB) = m(\angle ABM) \\
 \left. \begin{array}{l} ABCD - \text{pătrat} \\ AC - \text{diagonala} \end{array} \right\} &\Rightarrow m(\angle CAB) = 45^\circ \quad \left. \begin{array}{l} M \in AC \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle MAB) = 45^\circ \\
 m(\angle MAB) + 2m(\angle ABM) &= 180^\circ \\
 m(\angle ABM) &= \frac{180 - 45}{2} = \frac{135}{2}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 m(\angle MBC) &= m(\angle ABC) - m(\angle ABM) \\
 m(\angle MBC) &= \cancel{90^\circ} - \frac{135^\circ}{2} \\
 m(\angle MBC) &= \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = \frac{45^\circ}{2}
 \end{aligned}$$

Exercițiul 6. Fie $ABCD$ un pătrat. În exteriorul pătratului se construiește triunghiul dreptunghic isoscel BCE cu ipotenuza BE (deci $\angle BCE = 90^\circ$ și $BC = CE$).

- (a) Demonstrează că punctele D, C, E sunt coliniare.
 (b) Arată că triunghiul DBE este isoscel.



a)

$$m(\angle DCE) = m(\angle DCB) + m(\angle BCE)$$

$$m(\angle DCB) = 90^\circ$$

$$m(\angle BCE) = 90^\circ$$

$$m(\angle DCE) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow D-C-E \text{ coliniare}$$

b)

Fie l - latura pătratului

Diagonala unui pătrat este $l\sqrt{2}$

$$BD = l\sqrt{2}$$

$$\triangle BCE - \text{dreptunghic isoscel} \Rightarrow \begin{cases} m(\angle BCE) = 90^\circ \\ BC = CE = l \end{cases}$$

$$\triangle BCE: m(\angle C) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema}]{\text{lui Pitagora}}$$

$$BE^2 = BC^2 + CE^2$$

$$BE = \sqrt{l^2 + l^2}$$

$$BE = \sqrt{2}l$$

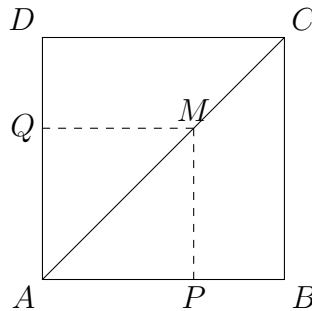
$$BE = l\sqrt{2}$$

6

$$\begin{matrix} BE = l\sqrt{2} \\ BD = l\sqrt{2} \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow BE = BD \Rightarrow \triangle DBE - \text{isoscel}$$

Exercițiul 7. Fie $ABCD$ un pătrat și M un punct oarecare situat pe diagonala AC . Fie P și Q proiecțiile punctului M pe laturile AB , respectiv AD ($MP \perp AB, MQ \perp AD$).

- (a) Demonstrează că patrulaterul $APMQ$ este un dreptunghi.
 (b) Arată că patrulaterul $APMQ$ este un pătrat.



a)

Un patrulater cu 3 unghiuri drepte este dreptunghi

$APMQ$:

$$m(\angle A) = 90^\circ$$

$$MP \perp AB, P \in AB \Rightarrow m(\angle APM) = 90^\circ$$

$$MQ \perp AD, Q \in AD \Rightarrow m(\angle AQM) = 90^\circ$$

$\} \Rightarrow APMQ - \text{dreptunghi}$

b)

$M \in AC$

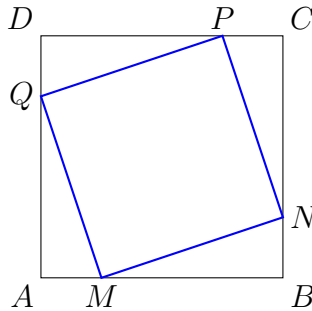
Într-un pătrat, diagonala este bisectoarea unghiului.

Orice punct de pe bisectoarea unui unghi se află la distanțe egale de laturile unghiului.

$$MP = MQ$$

Dreptunghiul $APMQ$ are 2 laturi congruente $\Rightarrow$
 $\Rightarrow APMQ - \text{pătrat}$

Exercițiul 8. În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat, iar punctele M, N, P, Q sunt situate pe laturile AB, BC, CD , respectiv DA astfel încât $AM = BN = CP = DQ$. Demonstrează că patrulaterul $MNPQ$ este un pătrat.



$$\left. \begin{array}{l} MA = NB \\ BM = AB - MA \\ CN = CB - NB \\ CB = AB \end{array} \right\} \Rightarrow BM = CN (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \\ AQ = AD - DQ \\ BM = AB - MA \\ DQ = AM \end{array} \right\} \Rightarrow AQ = BM (2)$$

Considerăm $\triangle AMQ$ și $\triangle BNM$ (dreptunghice)

$$\left. \begin{array}{l} AM = BN \text{ (ipoteză)} \\ AQ = BM \text{ (2)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{c.c.}} \triangle AMQ \equiv \triangle BNM \Rightarrow MQ = MN$$

$$m(\angle AMQ) = m(\angle BNM) = x$$

$$m(\angle AQM) = m(\angle BMN) = y$$

În $\triangle AMQ$, suma unghiurilor ascuțite este 90°

$$x + y = 90^\circ$$

$$\underbrace{m(\angle AMQ)}_x + m(\angle QMN) + \underbrace{m(\angle BMN)}_y = 180^\circ$$

$$\underbrace{x + y}_{90^\circ} + m(\angle QMN) = 180^\circ$$

$$m(\angle QMN) = 90^\circ$$

Considerăm $\triangle BNM$ și $\triangle CPN$

$$\left. \begin{array}{l} BN = CP \text{ (ipoteză)} \\ BM = CN \text{ (3)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{c.c.}} \triangle BNM \equiv \triangle CPN \Rightarrow MN = NP$$

$$m(\angle MNP) = 90^\circ \text{ (la fel ca mai sus calculăm)}$$

Analog considerăm $\triangle CPN$ și $\triangle DQP \Rightarrow NP = PQ$ și $m(\angle NPQ) = 90^\circ$

$MNPQ$ - patrulater

$$\left. \begin{array}{l} MQ = MN = NP = PQ \\ m(\angle MNP) = m(\angle NPQ) = m(\angle QMN) = m(\angle PMQ) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow MNPQ - \text{pătrat}$$

Succes!