

Lecția 2 - Paralelogramul

Clasa a 7-a – Capitolul 1 - Geometrie

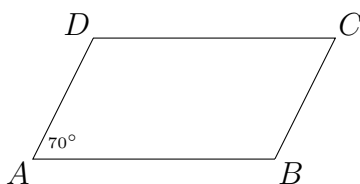
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile pe baza definiției paralelogramului și a proprietăților acestuia (laturi opuse congruente, unghiuri opuse congruente, diagonalele se înjumătățesc). Durata recomandată: **45 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Fie $ABCD$ un paralelogram în care măsura unghiului A este de 70° .

- Precizează măsura unghiului C (opus lui A).
- Calculează măsura unghiului B (alăturat lui A).



a)

Într-un paralelogram, unghiurile opuse sunt congruente.
Unghiul C este opus lui A

$$m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C) = 70^\circ$$

b)

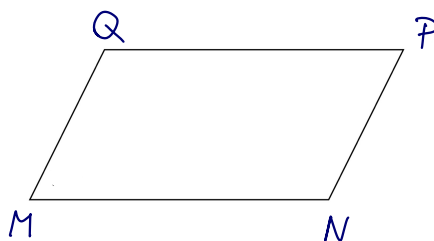
Într-un paralelogram, unghiurile alăturate sunt suplementare
Unghiurile A și B sunt alăturate.

$$m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle B) = 180^\circ - m(\sphericalangle A)$$

$$m(\sphericalangle A) = 70^\circ$$

$$m(\sphericalangle B) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

Exercițiul 2. Un paralelogram $MNPQ$ are lungimea laturii MN de 8 cm, iar latura NP este cu 3 cm mai scurtă decât MN . Calculează perimetrul paralelogramului.



$$MN = 8 \text{ cm}$$

$$NP = MN - 3$$

$$NP = 8 - 3$$

$$NP = 5 \text{ cm}$$

Într-un paralelogram, laturile opuse sunt congruente.

$$MN \equiv QP = 8 \text{ cm}$$

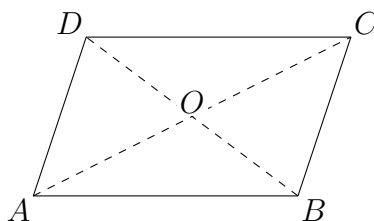
$$NP \equiv MQ = 5 \text{ cm}$$

$$P_{MNPQ} = MN + NP + PQ + QM = 2MN + 2NP = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 5 = 16 + 10 = 26 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. În paralelogramul $ABCD$, diagonalele AC și BD se intersectează în punctul O . Știind că lungimea segmentului AO este de 6 cm și lungimea segmentului BO este de 8 cm:

(a) Calculează lungimea întregii diagonale AC .

(b) Calculează suma lungimilor celor două diagonale ($AC + BD$).



a)

$$AC \cap BD = \{O\}$$

Într-un paralelogram, diagonalele se înjumătățesc
 O - mijlocul lui $AC \Rightarrow AO = OC = \frac{AC}{2}$

$$AC = 2AO \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow AC = 2 \cdot 6 = 12 \text{ cm} \\ AO = 6 \end{array} \right.$$

b)

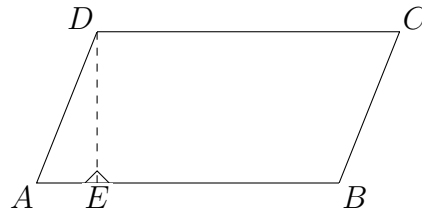
$$O - \text{mijlocul lui } BD \Rightarrow BO = OD = \frac{BD}{2}$$

$$BD = 2 \cdot BO \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \\ BO = 8 \end{array} \right. \quad BD = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm}$$

$$AC + BD = 12 + 16 = 28 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. În paralelogramul $ABCD$, măsura unghiului B este cu 40° mai mare decât măsura unghiului A .

- Calculează măsurile celor patru unghiuri ale paralelogramului.
- Dacă construim înălțimea $DE \perp AB$ (cu $E \in AB$), determină măsura unghiului ADE .



a)

$$\begin{aligned} \angle A \text{ și } \angle B \text{ sunt suplementare} \\ m(\angle A) + m(\angle B) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle A) + m(\angle A) + 40^\circ = 180^\circ \\ m(\angle B) = m(\angle A) + 40^\circ \\ 2m(\angle A) + 40^\circ = 180^\circ \quad | -40^\circ \\ 2m(\angle A) = 140^\circ \quad | :2 \\ m(\angle A) = 70^\circ \\ m(\angle B) = m(\angle A) + 40^\circ = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ \\ ABCD - \text{paralelogram} \Rightarrow m(\angle A) = m(\angle C) = 70^\circ \\ m(\angle B) = m(\angle D) = 110^\circ \end{aligned}$$

b)

$$DE \perp AB, E \in AB \Rightarrow m(\angle AED) = m(\angle DEB) = 90^\circ$$

În $\triangle ADE$: $m(\angle AED) = 90^\circ$

Obs.:

Într-un triunghi, suma măsurilor unghiurilor este 180°

$$m(\angle ADE) + m(\angle AED) + m(\angle DAE) = 180^\circ$$

$$m(\angle DAE) = 70^\circ$$

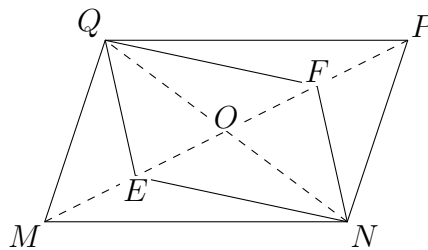
$$m(\angle ADE) = 180^\circ - m(\angle AED) - m(\angle DAE)$$

$$m(\angle ADE) = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ \quad 3$$

$$m(\angle ADE) = 20^\circ$$

Exercițiul 5. Se consideră paralelogramul $MNPQ$ și punctul O de intersecție a diagonalelor. Fie punctele $E \in MP$ și $F \in NP$ astfel încât E este mijlocul segmentului MO , iar F este mijlocul segmentului PO .

- (a) Demonstrează că $ME \equiv PF$.
 (b) Arată că patrulaterul $NFQE$ este paralelogram (folosind proprietatea diagonalelor care se înjumătățesc).



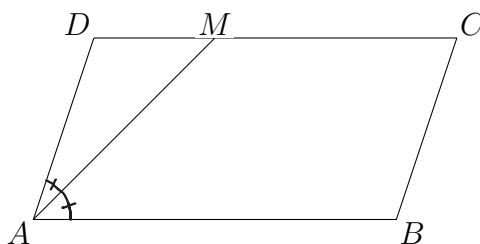
a)
 $MNPQ$ - paralelogram $\Rightarrow$ diagonalele se înjumătățesc
 $\Rightarrow MO = OP$
 E - mijlocul lui $MO \Rightarrow ME = EO = \frac{MO}{2} \Rightarrow MO = 2ME = 2EO$
 F - mijlocul lui $PO \Rightarrow PF = FO = \frac{PO}{2} \Rightarrow PO = 2PF = 2FO$
 $MO = OP \Rightarrow \cancel{2ME} = \cancel{2PF}$
 $ME = PF \Rightarrow ME \equiv PF$

b)
 $NFQE$ - patrulater cu diagonalele NQ și EF
 Din proprietatea paralelogramului $MNPQ$, O - mijlocul lui NQ
 De la punctul a), $MO = OP \Rightarrow \cancel{2EO} = \cancel{2FO}$
 $EO = FO$

$EO = FO \Rightarrow O$ este mijlocul lui EF
 Deoarece diagonalele NQ și EF se înjumătățesc în același punct O , patrulaterul $NFQE$ este paralelogram.

Exercițiul 6. Fie $ABCD$ un paralelogram cu perimetrul de 48 cm și $AB = 16$ cm. Biseectoarea unghiului A intersectează latura CD în punctul M .

- (a) Demonstrează că triunghiul ADM este isoscel.
 (b) Calculează lungimile segmentelor DM și MC .



a)

$ABCD$ - paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$
 AM - secantă $\Rightarrow \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle DMA$ (alterne interne)
 AM - bisectoarea $\sphericalangle DAB \Rightarrow m(\sphericalangle DAM) = m(\sphericalangle MAB)$
 $m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle DMA) \quad \left\{ \Rightarrow m(\sphericalangle DMA) = m(\sphericalangle DAM) \right.$
 $m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle DAM)$

Concl.: Un triunghi cu 2 unghiuri congruente este isoscel.

$\triangle ADM$: $m(\sphericalangle DMA) = m(\sphericalangle DAM) \Rightarrow \triangle ADM$ este isoscel

b)

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= AB + BC + CD + AD \\ &= 2(AB + AD) \end{aligned}$$

$$P_{ABCD} = 48$$

$$AB = 16$$

$$2(16 + AD) = 48 \quad | : 2$$

$$16 + AD = 24 \quad | - 16$$

$$AD = 8 \text{ cm}$$

$$\triangle ADM - \text{isoscel} \Rightarrow AD = DM = 8 \text{ cm}$$

$$M \in DC \Rightarrow DM + MC = DC \Rightarrow MC = DC - DM$$

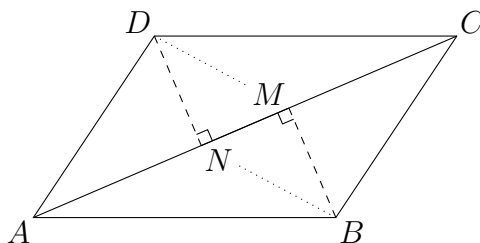
$$DC = AB = 16 \text{ cm}$$

$$MC = 16 - 8$$

$$MC = 8 \text{ cm}$$

Exercițiul 7. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Din vârfurile B și D se construiesc perpendicularele pe diagonala AC : $BM \perp AC$ ($M \in AC$) și $DN \perp AC$ ($N \in AC$).

- (a) Demonstrează că triunghiul ABM este congruent cu triunghiul CDN (Cazul Ipoteuză-Unghi).
 (b) Arată că patrulaterul $BMDN$ este un paralelogram.



a)

$$BM \perp AC, M \in AC \Rightarrow m(\angle BMA) = 90^\circ$$

$$DN \perp AC, N \in AC \Rightarrow m(\angle DNC) = 90^\circ$$

$$M, N \in AC \Rightarrow m(\angle BMN) = 90^\circ$$

$$m(\angle DNM) = 90^\circ$$

$$ABCD - \text{paralelogram} \Rightarrow AB \equiv DC \quad (1)$$

Considerăm $\triangle ABM$ și $\triangle CDN$

$$\left. \begin{array}{l} AB \equiv CD \quad (1) \\ \angle BAM \equiv \angle DCN \quad (\text{alterne interne, } AB \parallel CD \text{ și } AC - \text{măsurătoare}) \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{i.u.}} \triangle ABM \equiv \triangle CDN$$

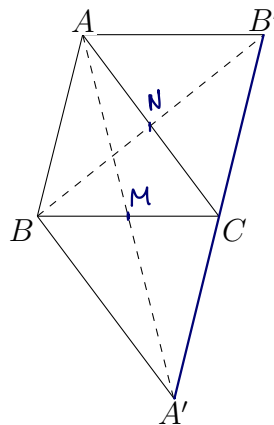
b)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Din } \triangle ABM \equiv \triangle CDN \Rightarrow AM \equiv CN \\ BM \equiv DN \end{array} \right\} \Rightarrow BMDN \text{ este paralelogram}$$

$$BM \perp AC \text{ și } DN \perp AC \Rightarrow BM \parallel DN$$

Exercițiul 8. Fie triunghiul ABC . Se construiește simetricul punctului A față de mijlocul laturii BC și îl notăm cu A' . Analog, fie B' simetricul lui B față de mijlocul laturii AC .

- (a) Demonstrează că patrulaterele $ABA'C$ și $ABCB'$ sunt paralelograme.
 (b) Arată că punctele A' , C și B' sunt coliniare și că C este mijlocul segmentului $A'B'$.



a)

Fie M mijlocul lui BC

A' -simetricul lui A față de $M \Rightarrow M$ -mijlocul lui AA'

În patrulaterul $ABA'C$, diagonalele BC și AA' se înjumătățesc în $M \Rightarrow ABA'C$ - paralelogram

Fie N mijlocul lui AC

B' -simetricul lui B față de $N \Rightarrow N$ -mijlocul lui BB'

În patrulaterul $ABCB'$, diagonalele AC și BB' se înjumătățesc în $N \Rightarrow ABCB'$ - paralelogram

b)

$ABA'C$ - paralelogram $\Rightarrow A'C \parallel AB$ și $A'C \equiv AB$

$ABCB'$ - paralelogram $\Rightarrow CB' \parallel AB$ și $CB' \equiv AB$

Deoarece ambele drepte $A'C$ și CB' sunt $\parallel$ cu AB și trec prin $C \Rightarrow A', C, B'$ sunt coliniare.

$A'C \equiv AB$
 $C'B \equiv AB$ $\Rightarrow A'C \equiv CB' \Rightarrow C$ -mijlocul lui $A'B'$