

Lecția 1 - Patrulaterul convex

Clasa a 7-a – Capitolul 1 - Geometrie

Instrucțiuni

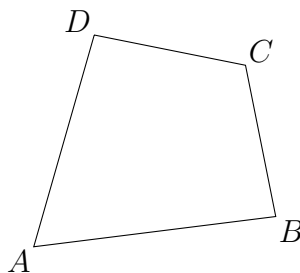
Rezolvă exercițiile pe baza definiției patrulaterului convex și a teoremei sumei măsurilor unghiurilor (360°). Durata recomandată: **45 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. În patrulaterul convex $ABCD$, măsura unghiului D este de 80° , iar suma măsurilor unghiurilor A și B este de 150° .

- Calculează măsura unghiului C .
- Știind că, în plus, măsura unghiului A este de 70° , determină măsura unghiului B .

a)



Sol.:

Într-un patrulater convex, suma măsurilor unghiurilor este 360° .

$$ABCD - \text{patrulater convex} \Rightarrow m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360^\circ \quad (1)$$

$$\text{Din ipoteză, } m(\angle A) + m(\angle B) = 150^\circ \text{ și } m(\angle D) = 80^\circ$$

Înlocuim în relația (1):

$$\underbrace{m(\angle A) + m(\angle B)}_{150^\circ} + m(\angle C) + \underbrace{m(\angle D)}_{80^\circ} = 360^\circ \Rightarrow 150^\circ + m(\angle C) + 80^\circ = 360^\circ \Rightarrow m(\angle C) = 360^\circ - 150^\circ - 80^\circ = 210^\circ - 80^\circ$$

$$m(\angle C) = 130^\circ$$

b)

$$\text{Știm că } m(\angle A) + m(\angle B) = 150^\circ \text{ și } m(\angle A) = 70^\circ$$

$$m(\angle B) = 150^\circ - m(\angle A)$$

$$m(\angle B) = 150^\circ - 70^\circ$$

$$m(\angle B) = 80^\circ$$

Exercițiul 2. Trei dintre unghiurile unui patrulater convex sunt congruente, având fiecare măsura de 100° . Determină măsura celui de-al patrulea unghi al patrulaterului.

Fie U_1, U_2, U_3, U_4 unghiurile unui patrulater convex $U_1U_2U_3U_4$
Alegem U_1, U_2, U_3 cele trei unghiuri congruente $\Rightarrow U_1 = U_2 = U_3$

$U_1U_2U_3U_4$ - patrulater convex $\Rightarrow m(\angle U_1) + m(\angle U_2) + m(\angle U_3) + m(\angle U_4) = 360^\circ$ (1)

$$m(\angle U_1) = m(\angle U_2) = m(\angle U_3) = 100^\circ$$

$$\begin{aligned} m(\angle U_1) + m(\angle U_2) + m(\angle U_3) &= \\ &= 100^\circ + 100^\circ + 100^\circ \\ &= 300^\circ \end{aligned}$$

Din relația (1) scoatem $m(\angle U_4)$

$$m(\angle U_4) = 360^\circ - (m(\angle U_1) + m(\angle U_2) + m(\angle U_3))$$

$$m(\angle U_4) = 360^\circ - 300^\circ$$

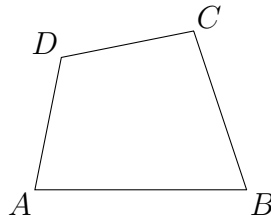
$$m(\angle U_4) = 60^\circ$$

Observație:

$\left. \begin{aligned} m(\angle U_1) &= 100^\circ > 90^\circ \\ m(\angle U_2) &= 100^\circ > 90^\circ \\ m(\angle U_3) &= 100^\circ > 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ Patrulaterul are 3 unghiuri obtuze, deci al patrulea trebuie să fie ascuțit, adică să fie cuprins între 0° și 90° , pentru a închide conturul.

Exercițiul 3. Determină măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, 5 și 6.

- (a) Scrie relația de proporționalitate și află coeficientul de proporționalitate (k).
 (b) Calculează măsurile celor patru unghiuri.



a)

ABCD - patrulater convex:
 $\{A, B, C, D\}$ d. p. $\{3, 4, 5, 6\}$

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{D}{6} = k \text{ (coeficient de proporționalitate)}$$

$$\frac{A}{3} = k \Rightarrow A = 3k$$

$$\frac{B}{4} = k \Rightarrow B = 4k$$

$$\frac{C}{5} = k \Rightarrow C = 5k$$

$$\frac{D}{6} = k \Rightarrow D = 6k$$

$$ABCD - \text{patrulater convex} \Rightarrow A + B + C + D = 360^\circ$$

$$\underbrace{3k + 4k}_{7k} + \underbrace{5k + 6k}_{11k} = 360^\circ$$

$$7k + 11k = 360^\circ$$

$$18k = 360^\circ \quad | : 18$$

$$k = 20^\circ$$

b)

$$A = 3k \quad | \quad \begin{matrix} \Rightarrow A = 3 \cdot 20^\circ \\ k = 20^\circ \end{matrix} \quad A = 60^\circ$$

$$B = 4k \quad | \quad \begin{matrix} \Rightarrow B = 4 \cdot 20^\circ \\ k = 20^\circ \end{matrix} \quad B = 80^\circ$$

$$C = 5k \quad | \quad \begin{matrix} \Rightarrow C = 5 \cdot 20^\circ \\ k = 20^\circ \end{matrix} \quad C = 100^\circ$$

$$D = 6k \quad | \quad \begin{matrix} \Rightarrow D = 6 \cdot 20^\circ \\ k = 20^\circ \end{matrix} \quad D = 120^\circ$$

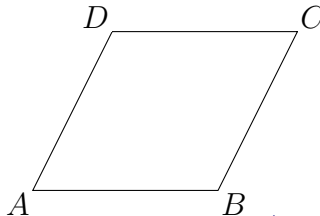
Verificare:

$$\begin{aligned} 60^\circ + 80^\circ + 100^\circ + 120^\circ &= \\ &= 140^\circ + 100^\circ + 120^\circ \\ &= 360^\circ \end{aligned}$$

Exercițiul 4. În patrulaterul convex $ABCD$ se cunosc următoarele relații între unghiuri:

$$\angle A = 2 \cdot \angle C, \quad \angle B = \angle A + 30^\circ, \quad \angle D = \angle C.$$

Află măsurile celor patru unghiuri ale patrulaterului.



$$ABCD - \text{patrulater convex} \Rightarrow m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360^\circ$$

$$m(\angle A) = 2 \cdot m(\angle C)$$

$$m(\angle B) = m(\angle A) + 30^\circ$$

$$m(\angle D) = m(\angle C)$$

Solu. :

Scriem toate unghiurile în funcție de C

$$\begin{aligned} m(\angle B) &= m(\angle A) + 30^\circ \\ m(\angle A) &= 2m(\angle C) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m(\angle B) &= 2m(\angle C) + 30^\circ \\ m(\angle A) &= 2m(\angle C) \end{aligned}$$

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360^\circ$$

$$2m(\angle C) + (2m(\angle C) + 30^\circ) + m(\angle C) + m(\angle C) = 360^\circ$$

$$2m(\angle C) + 2m(\angle C) + 30^\circ + m(\angle C) + m(\angle C) = 360^\circ$$

$$6m(\angle C) + 30^\circ = 360^\circ \quad | - 30^\circ$$

$$6m(\angle C) = 330^\circ \quad | : 6$$

$$m(\angle C) = 55^\circ$$

$$\begin{aligned} m(\angle A) &= 2m(\angle C) \\ m(\angle C) &= 55^\circ \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m(\angle A) &= 2 \cdot 55^\circ \\ m(\angle A) &= 110^\circ \end{aligned}$$

$$m(\angle B) = m(\angle A) + 30^\circ = 110^\circ + 30^\circ = 140^\circ$$

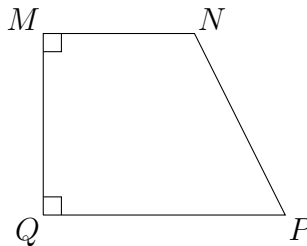
$$m(\angle D) = m(\angle C) = 55^\circ$$

$$\text{Verificare: } 110^\circ + 140^\circ + 55^\circ + 55^\circ = 250^\circ + 110^\circ = 360^\circ$$

Exercițiul 5. În patrulaterul convex $MNPQ$, se știe că latura MN este paralelă cu latura PQ , iar latura MQ este perpendiculară pe MN ($MQ \perp MN$). Măsurile unghiurilor N și P sunt invers proporționale cu numerele 0,25 și respectiv 0,125.

(a) Determină măsurile unghiurilor M și Q .

(b) Calculează măsurile unghiurilor N și P .



a) $MQ \perp MN \Rightarrow m(\angle M) = 90^\circ$

Observ. : O dreaptă se numește secantă dacă taie două sau mai multe drepte distincte.

$MN \parallel PQ$ și MQ - secantă

Unghiurile M și Q sunt de aceeași parte a secantei, deci sunt suplementare.

$$m(\angle M) + m(\angle Q) = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} m(\angle Q) &= 180^\circ - m(\angle M) \\ m(\angle M) &= 90^\circ \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} m(\angle Q) &= 180^\circ - 90^\circ \\ m(\angle Q) &= 90^\circ \end{aligned}$$

b) $MN \parallel PQ$ și NP - secantă $\Rightarrow$ unghiurile N și P sunt suplementare

$$m(\angle N) + m(\angle P) = 180^\circ \quad (1)$$

$$\{N, P\} \text{ i. p. } \{0,25, 0,125\}$$

$$0,25 N = 0,125 P = k \quad (\text{coeficient de proporționalitate})$$

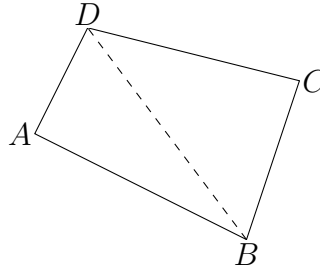
$$\begin{aligned} 0,25 m(\angle N) &= 0,125 \cdot m(\angle P) = k \\ 0,25 &= \frac{1}{4} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{1}{4} m(\angle N) &= k \quad | \cdot 4 \\ m(\angle N) &= 4k \end{aligned}$$

$$0,125 = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} m(\angle P) &= k \quad | \cdot 8 \\ m(\angle P) &= 8k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(\angle N) + m(\angle P) &= 180^\circ \\ 4k + 8k &= 180^\circ \\ 12k &= 180^\circ : 12 \\ k &= 15^\circ \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} m(\angle N) &= 4k = 4 \cdot 15^\circ = 60^\circ \\ m(\angle P) &= 8k = 8 \cdot 15^\circ = 120^\circ \end{aligned} \right.$$

Exercițiul 6. Fie $ABCD$ un patrulater convex și BD una dintre diagonalele sale. Se știe că suma perimetrelor triunghiurilor ABD și BCD este egală cu 80 cm, iar diagonala BD are lungimea de 10 cm. Calculează perimetrul patrulaterului $ABCD$.



$$P_{ABD} + P_{BCD} = 80$$

$$BD = 10$$

$$P_{ABD} = AB + BD + DA$$

$$P_{BCD} = BC + CD + DB$$

$$\begin{aligned} P_{ABD} + P_{BCD} &= AB + BD + DA + BC + CD + DB \\ P_{ABD} + P_{BCD} &= 80 \end{aligned} \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB + \underline{BD} + DA + BC + CD + \underline{DB} = 80$$

$$BD = DB = 10$$

$$AB + BC + CD + DA + 2BD = 80$$

$$AB + BC + CD + DA + 2 \cdot 10 = 80$$

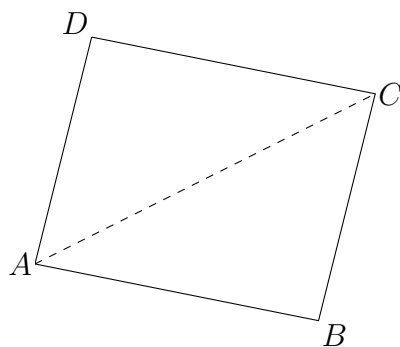
$$AB + BC + CD + DA + 20 = 80 \quad | -20$$

$$\begin{aligned} AB + BC + CD + DA &= 60 \\ P_{ABCD} &= AB + BC + CD + DA \end{aligned} \quad \Bigg\} \Rightarrow P_{ABCD} = 60$$

Observație:

$$P_{\text{patrulater}} = P_{\Delta_1} + P_{\Delta_2} - 2 \cdot \text{diagonala comună}$$

Exercițiul 7. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu perimetrul de 120 cm. Diagonala AC are lungimea de 20 cm și împarte patrulaterul în două triunghiuri cu perimetre egale ($P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ADC}$). Știind că măsura unghiului B este media aritmetică a măsurilor unghiurilor A și C , iar $\angle D = 120^\circ$, calculează perimetrul triunghiului ABC și măsura unghiului B .



$$P_{ABC} = AB + BC + CA$$

$$P_{ADC} = AD + DC + CA$$

Știm că $P_{ABC} = P_{ADC}$, iar $AC =$ latură comună

$$AB + BC + \cancel{CA} = AD + DC + \cancel{CA}$$

$$AB + BC = AD + DC$$

$$P_{ABCD} = 120$$

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$$

$$P_{ABCD} = AD + DC + CD + DA$$

$$P_{ABCD} = 2(AD + DC) \Rightarrow AD + DC = \frac{P_{ABCD}}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

$$\left. \begin{array}{l} AB + BC = AD + DC \Rightarrow AB + BC = 60 \\ P_{ABC} = AB + BC + CA \\ AC = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow P_{ABC} = 60 + 20 = 80 \text{ cm}$$

$$m(\angle B) = \frac{m(\angle A) + m(\angle C)}{2} \Rightarrow 2m(\angle B) = m(\angle A) + m(\angle C)$$

$$\underline{m(\angle A)} + m(\angle B) + \underline{m(\angle C)} + m(\angle D) = 360^\circ$$

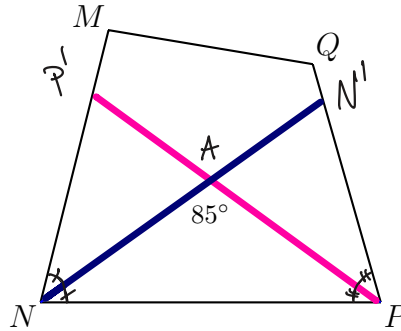
$$m(\angle A) + m(\angle C) = 2m(\angle B)$$

$$m(\angle D) = 120^\circ$$

7

$$\begin{aligned} 2m(\angle B) + m(\angle B) + 120 &= 360^\circ \quad | -120^\circ \\ 3m(\angle B) &= 240^\circ \quad | :3 \Rightarrow m(\angle B) = 80^\circ \end{aligned}$$

Exercițiul 8. În patrulaterul convex $MNPQ$, bisectoarele unghiurilor consecutive N și P se intersectează într-un punct A situat în interiorul patrulaterului. Știind că măsura unghiului NAP este de 85° , calculează media aritmetică a măsurilor unghiurilor M și Q (adică valoarea expresiei $\frac{M+Q}{2}$).



Fie NN' - bisectoarea unghiului $MNP \Rightarrow m(\angle MNN') = m(\angle N'NP) = \frac{m(\angle MNP)}{2}$

PP' - bisectoarea $\angle NPQ \Rightarrow m(\angle NPP') = m(\angle P'PQ) = \frac{m(\angle NPQ)}{2}$

În $\triangle NAP$:

$$m(\angle NAP) + m(\angle ANP) + m(\angle NPA) = 180^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{și } PP' \cap NN' \Rightarrow \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m(\angle ANP) = m(\angle N'NP) = \frac{m(\angle MNP)}{2} \\ m(\angle NPA) = m(\angle NPP') = \frac{m(\angle NPQ)}{2} \end{array}$$

$$m(\angle NAP) + \frac{m(\angle MNP)}{2} + \frac{m(\angle NPQ)}{2} = 180^\circ$$

$$m(\angle NAP) = 85^\circ$$

$$\frac{m(\angle MNP)}{2} + \frac{m(\angle NPQ)}{2} = 180^\circ - 85^\circ$$

$$\frac{m(\angle MNP)}{2} + \frac{m(\angle NPQ)}{2} = 95^\circ \quad | \cdot 2$$

$$m(\angle MNP) + m(\angle NPQ) = 190^\circ \Rightarrow m(\angle N) + m(\angle P) = 190^\circ$$

$$MNPQ - \text{patrulater convex} \Rightarrow m(\angle M) + m(\angle N) + m(\angle P) + m(\angle Q) = 360^\circ$$

$$m(\angle M) + m(\angle Q) + 190^\circ = 360^\circ \quad | -190^\circ$$

$$m(\angle M) + m(\angle Q) = 170^\circ \quad | : 2$$

Uls $\therefore$ Împărțim la 2 pentru a obține media aritmetică

$$\frac{m(\angle M) + m(\angle Q)}{2} = 85^\circ$$