

Fișă de lucru

Lecția 15 – Secțiuni diagonale și axiale

Clasa a 8-a – Capitolul 1 – Geometrie în spațiu

Instrucțiuni

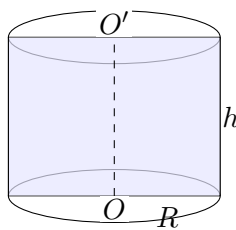
Rezolvă exercițiile folosind definițiile secțiunilor axiale (plan care trece prin axa de simetrie a unui corp de rotație sau a unei prisme/piramide) și ale secțiunilor diagonale (plan determinat de două muchii laterale neadiacente). Durata recomandată: **45–50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$.

- Numiți două secțiuni diagonale ale cubului.
- Ce formă geometrică are secțiunea diagonală $ACC' A'$?

Exercițiul 2. Un cilindru circular drept are raza bazei $R = 4$ cm și înălțimea $h = 6$ cm. Calculați aria secțiunii axiale a cilindrului.



Exercițiul 3. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are diagonala bazei $AC = 10$ cm și înălțimea $VO = 12$ cm. Calculați aria secțiunii diagonale VAC .

Exercițiul 4. Se consideră o prismă patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ cu latura bazei $AB = 6$ cm și înălțimea $AA' = 8$ cm. Calculați lungimea diagonalei unei secțiuni axiale.

Exercițiul 5. Un con circular drept are raza bazei $R = 5$ cm. Secțiunea axială a conului este un triunghi dreptunghic isoscel. Calculați înălțimea și generatoarea conului.

Exercițiul 6. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor $R = 10$ cm și $r = 4$ cm, iar generatoarea $G = 10$ cm. Calculați aria secțiunii axiale a trunchiului de con.

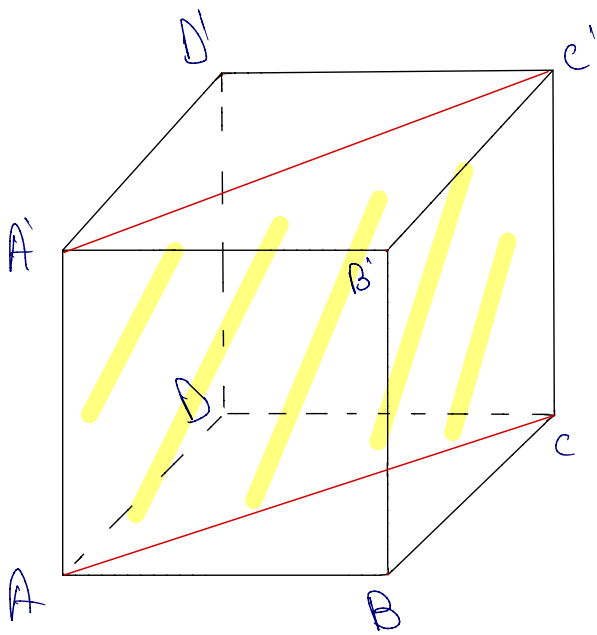
Exercițiul 7. Fie o prismă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ cu latura bazei $l = 4$ cm și înălțimea $h = 6$ cm. Calculați aria secțiunii diagonale $ADD'A'$ și comparați-o cu aria secțiunii diagonale $ACC'A'$.

Exercițiul 8. Un cilindru circular drept este secționat de un plan paralel cu axa cilindrului, situat la distanța de 3 cm față de axă. Raza cilindrului este $R = 5$ cm, iar înălțimea este $h = 8$ cm. Calculați aria acestei secțiuni.

Succes!

Exercițiul 1. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$.

- (a) Numiți două secțiuni diagonale ale cubului.
 (b) Ce formă geometrică are secțiunea diagonală $ACC' A'$?



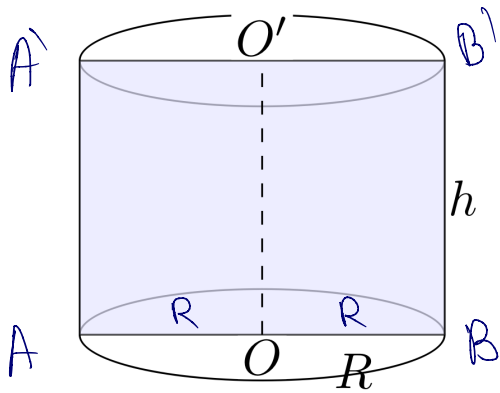
a) $(ACC' A')$ și $(BDD' B')$

b) $AA' \parallel CC'$
 $AA' = CC'$ } $\Rightarrow A' C' C A$ paralelogram

$A' A \perp (ABCD)$
 $AC \subset (ABCD)$ } $\Rightarrow A' A \perp AC$

$\Rightarrow A' C' C A$ dreptunghi

Exercițiul 2. Un cilindru circular drept are raza bazei $R = 4$ cm și înălțimea $h = 6$ cm. Calculați aria secțiunii axiale a cilindrului.



$A_{ABB' A'} = ?$

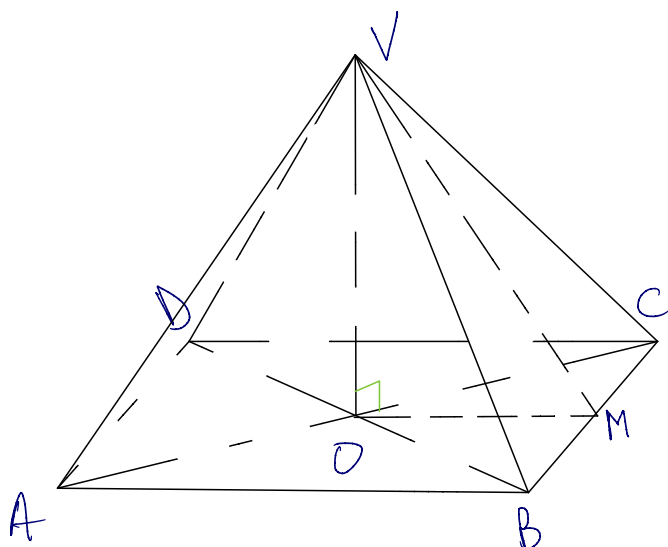
$A_{ABB' A'} = AB \cdot BB'$ (este dreptunghi)

$AB = 2R = 8$ cm

$B' B = R = 6$ cm

$\Rightarrow A_{ABB' A'} = 8 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^2$

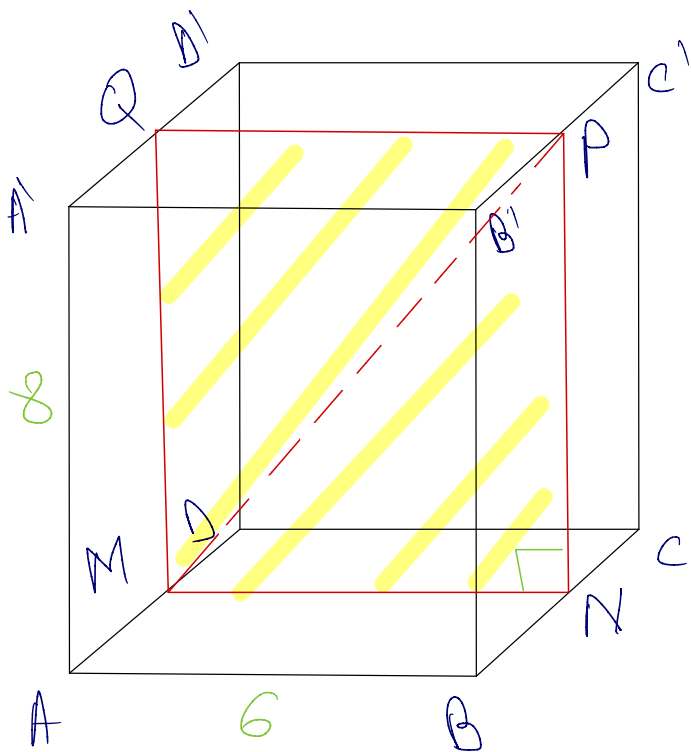
Exercițiul 3. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are diagonala bazei $AC = 10$ cm și înălțimea $VO = 12$ cm. Calculați aria secțiunii diagonale VAC .



$$A_{VAC} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{AC \cdot VO}{2}$$

$$\Rightarrow A_{VAC} = \frac{10 \cdot 12}{2} \Rightarrow A_{VAC} = 60 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 4. Se consideră o prismă patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ cu latura bazei $AB = 6$ cm și înălțimea $AA' = 8$ cm. Calculați lungimea diagonalei unei secțiuni axiale.



Obs. / Puteti alege oricare secțiune axială.

Aleg secțiunea $MNPQ$, unde punctele M, N, P și Q sunt mijloace ale laturilor opuse din bazele prismei.

$$MN \parallel AB \parallel CD$$

$$QP \parallel A'B' \parallel C'D'$$

Avem de calculat MP .

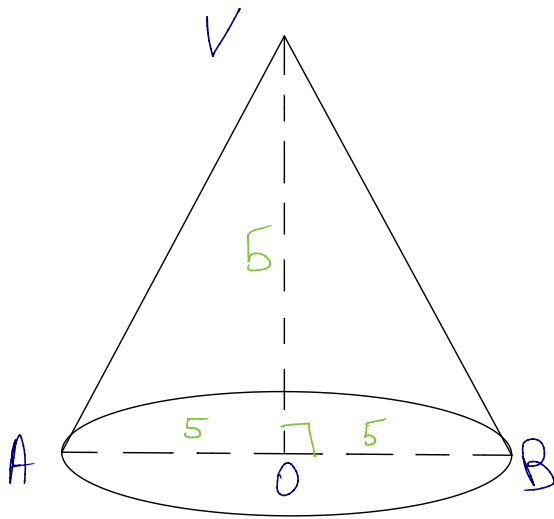
$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AB \\ AM \parallel BN \end{array} \right\} \Rightarrow ABNM \text{ paralelogram} \Rightarrow AB = MN = 6 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} B'B \parallel PN \\ B'P \parallel BN \end{array} \right\} \Rightarrow B'PNB \text{ paralelogram} \Rightarrow B'B = PN = 8 \text{ cm}$$

$$\text{În } \triangle MNP \text{ dreptunghic aplic T.P.: } MP^2 = MN^2 + NP^2$$

$$\Rightarrow MP^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow MP = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

Exercițiul 5. Un con circular drept are raza bazei $R = 5$ cm. Secțiunea axială a conului este un triunghi dreptunghic isoscel. Calculați înălțimea și generatoarea conului.



$\triangle VAB$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow$
 $G = VA = VB$

$$\Rightarrow \angle AVB = 90^\circ$$

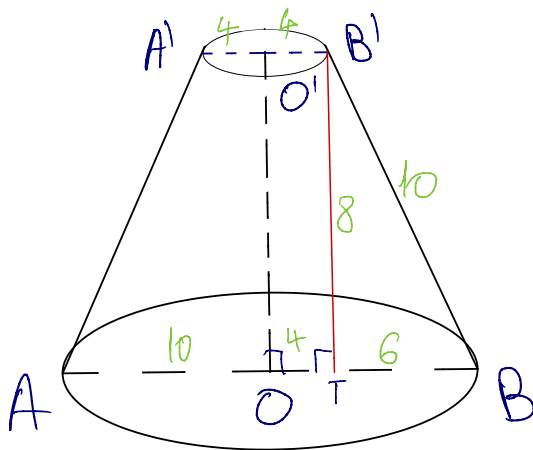
$\triangle VAB$ dreptunghic $\Rightarrow VO = AO = OB$
 VO mediană $= 5$ cm

$$\Rightarrow R = 5$$
 cm

În $\triangle VOB$ dreptunghic aplic T.P.: $VB^2 = VO^2 + OB^2 \Rightarrow VB^2 = 5^2 + 5^2$

$$VB^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow VB = \sqrt{50} \Rightarrow VB = 5\sqrt{2} \text{ cm} = G$$

Exercițiul 6. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor $R = 10$ cm și $r = 4$ cm, iar generatoarea $G = 10$ cm. Calculați aria secțiunii axiale a trunchiului de con.



$$A_{ABB'A'} = ?$$

Fie $B'T \perp OB$, $T \in OB$

$O'O \parallel B'T$
 $O'O = B'T$ $\Rightarrow OTB'O'$ paralelogram

$$\Rightarrow O'O = B'T \text{ și } O'B' = OT = 4$$

$$TB = OB - OT = 10 - 4 = 6 \text{ cm}$$

În $\triangle B'TB$ dreptunghic aplic T.P.: $B'B^2 = B'T^2 + TB^2$

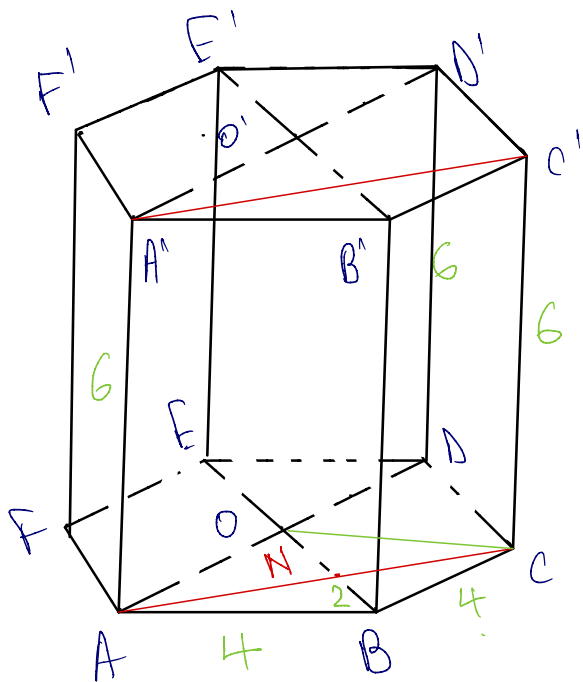
$$\Rightarrow B'T^2 = B'B^2 - TB^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\Rightarrow B'T = \sqrt{64} = 8 \text{ cm} = h$$

$$A_{ABB'A'} = \frac{(B + G) \cdot h}{2} = \frac{(2R + 2r) \cdot h}{2} = \frac{(20 + 8) \cdot 8}{2} = 112 \text{ cm}^2$$

$$A_{ABB'A} = 14 \cdot 8 = 112 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 7. Fie o prismă hexagonală regulată $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ cu latura bazei $l = 4$ cm și înălțimea $h = 6$ cm. Calculați aria secțiunii diagonale $ADD' A'$ și comparați-o cu aria secțiunii diagonale $ACC' A'$.



Obs.) Într-un hexagon regulat, orice diagonală este egală în lungime cu dublul laturii.

$$\Rightarrow AD = 2 \cdot l = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm} \quad \left. \begin{array}{l} \\ A'D' = 2 \cdot l = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} AD = A'D' \\ A'A = D'D \end{array} \right\} \Rightarrow A'ADD' \text{ paralelogram} \Rightarrow A'A \perp AD$$

$$\Rightarrow A'ADD' \text{ dreptunghi} \Rightarrow A_{A'ADD'} = A'A \cdot AD = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2 \quad \textcircled{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CO \\ BC \parallel AO \end{array} \right\} \Rightarrow ABCO \text{ paralelogram} \left. \begin{array}{l} \\ AB = BC \end{array} \right\} \Rightarrow ABCO \text{ romb} \Rightarrow AC \perp BO$$

$$\text{Fie } AC \cap BO = \{N\} \Rightarrow \angle ANB = 90^\circ$$

$$ABCDEF \text{ hexagon} \Rightarrow \angle ABC = 120^\circ \Rightarrow \angle ABN = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \text{În } \triangle ANB: \angle NAB = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\text{Conform } T_{30^\circ} \Rightarrow NB = \frac{AB}{2} = 2 \text{ cm}$$

$$\text{În } \triangle ANB \text{ dreptunghic aplic T.P.: } AN^2 = AB^2 - NB^2$$

$$\Rightarrow AN^2 = 4^2 - 2^2 = (16 - 4 = 12) \Rightarrow AN = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

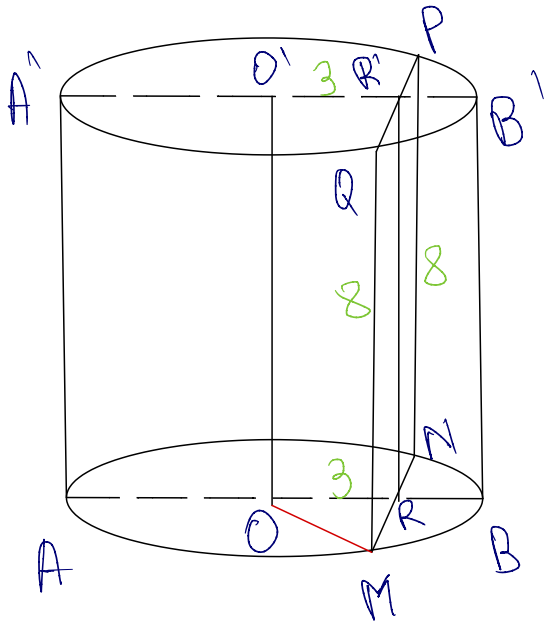
$$AC = 2 \cdot AN = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A_{ACC'A'} = A'A \cdot AC = 6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad \textcircled{2}$$

Dim ① și ② avem de comparat 48 și $24\sqrt{3}$

$$\left. \begin{array}{l} 48 = 24 \cdot 2 \\ 24 \cdot \sqrt{3} \\ 2 > \sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow 48 > 24\sqrt{3} \Rightarrow A_{A'ADD'} > A_{ACC'A'}$$

Exercițiul 8. Un cilindru circular drept este secționat de un plan paralel cu axa cilindrului, situat la distanța de 3 cm față de axă. Raza cilindrului este $R = 5$ cm, iar înălțimea este $h = 8$ cm. Calculați aria acestei secțiuni.



$$O'R' = OR = 3 \text{ cm}$$

MNPQ este secțiunea paralelă din enunț.

$$MQ = NP = h = 8 \text{ cm}$$

$$OM = R = 5 \text{ cm}$$

În $\triangle ORM$ dreptunghic aplic T.P.:

$$OM^2 = OR^2 + RM^2 \Rightarrow RM^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$RM = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$MN = 2 \cdot RM = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}$$

$$A_{MNPQ} = MQ \cdot MN = 8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2$$