

## Lecția 14 – Plane perpendiculare

Clasa a 8-a – Capitolul 1-Geometrie în spațiu

### Instrucțiuni

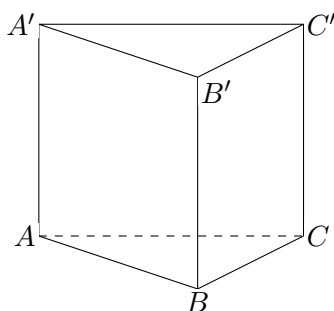
Rezolvă exercițiile folosind criteriul de perpendicularitate a planelor: două plane sunt perpendiculare dacă unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt plan.  
Durata recomandată: 45-50 minute

### Exerciții

**Exercițiul 1.** Se consideră cubul  $ABCD A' B' C' D'$ .

- Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:  $(ABB') \perp (BCC')$ .
- Numiți un plan perpendicular pe planul bazei  $(ABC)$ .
- Dacă  $M$  este mijlocul muchiei  $BB'$ , demonstrați că propoziția " $AM \perp (BCC')$ " este falsă.

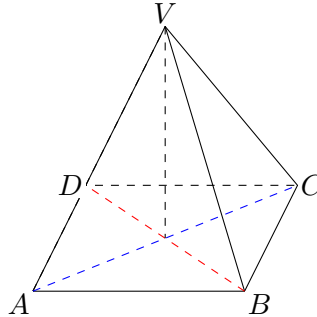
**Exercițiul 2.** Fie prisma triunghiulară regulată  $ABCA' B' C'$ . Demonstrați că planul feței laterale  $(ABB')$  este perpendicular pe planul bazei  $(ABC)$ .



**Exercițiul 3.** În tetraedrul regulat  $ABCD$ , fie  $M$  mijlocul laturii  $BC$ . Știind că înălțimea din  $A$  cade în centrul bazei  $O$  (care se află pe  $DM$ ), precizați dacă planul  $(ADM)$  este perpendicular pe planul  $(ABC)$ .

**Exercițiul 4.** Se consideră piramida patrulateră regulată  $VABCD$  cu vârful  $V$  și înălțimea  $VO$ .

- (a) Arătați că planul diagonal  $(VAC)$  este perpendicular pe planul bazei  $(ABCD)$ .
- (b) Arătați că planul diagonal  $(VAC)$  este perpendicular pe planul diagonal  $(VBD)$ .



**Exercițiul 5.** Fie triunghiul dreptunghic isoscel  $ABC$  cu  $\angle A = 90^\circ$ . Pe planul triunghiului se ridică perpendiculara  $MA$ . Demonstrați că planul  $(MAC)$  este perpendicular pe planul  $(MAB)$ .

**Exercițiul 6.** În cubul  $ABCD A' B' C' D'$ , fie  $M$  mijlocul segmentului  $AB$ . Demonstrați că planul  $(MDD')$  este perpendicular pe planul  $(ABCD)$ .

**Exercițiul 7.** Fie dreptunghiul  $ABCD$  și  $MA \perp (ABCD)$ . Construim  $AE \perp MB$ , cu  $E \in MB$ .

- (a) Arătați că  $BC \perp (MAB)$ .
- (b) Demonstrați că planele  $(ADE)$  și  $(MBC)$  sunt perpendiculare.

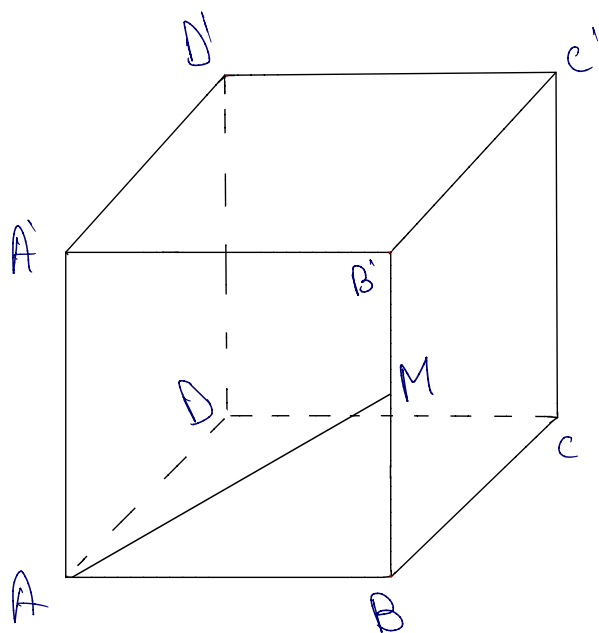
**Exercițiul 8.** Fie piramida  $DABC$  cu muchia  $DA$  perpendiculară pe planul bazei  $(ABC)$ . În triunghiul  $ABC$ , fie  $H$  ortocentrul (punctul de intersecție al înălțimilor).

- (a) Demonstrați că dreapta  $BC$  este perpendiculară pe planul  $(DAH)$ .
- (b) Arătați că planul  $(DBC)$  este perpendicular pe planul  $(DAH)$ .

**Succes!**

**Exercițiul 1.** Se consideră cubul  $ABCD A' B' C' D'$ .

- Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:  $(ABB') \perp (BCC')$ .
- Numiți un plan perpendicular pe planul bazei  $(ABC)$ .
- Dacă  $M$  este mijlocul muchiei  $BB'$ , demonstrați că propoziția " $AM \perp (BCC')$ " este falsă.



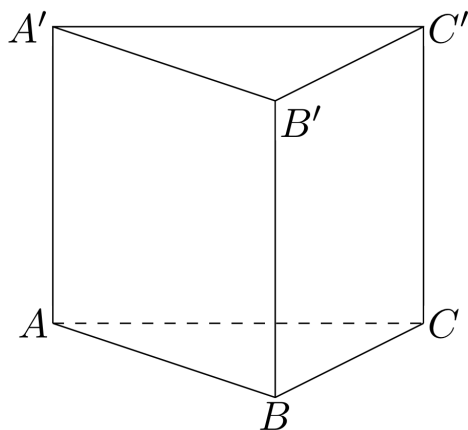
a) **Adevărat**

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp (BCC') \\ AB \subset (ABB') \end{array} \right\} \Rightarrow (ABB') \perp (BCC')$$

b) Putem numi orice față laterală, de ex.:  $(ABB'A')$ .

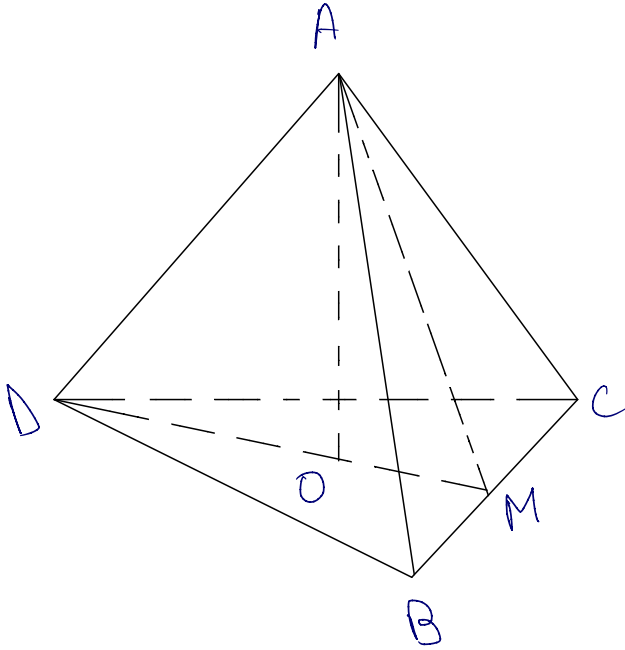
c) Știm deja că  $AB \perp BC$  și  $AB \perp BB'$ . Dintr-un punct, putem duce doar o perpendiculară pe o dreaptă. Deci,  $AM$  nu poate fi perpendiculară pe acele drepte, implicit pe acel plan.

**Exercițiul 2.** Fie prisma triunghiulară regulată  $ABC A' B' C'$ . Demonstrați că planul feței laterale  $(ABB')$  este perpendicular pe planul bazei  $(ABC)$ .



$$\left. \begin{array}{l} A'A \perp AB \\ A'A \perp AC \\ AB, AC \subset (ABC) \\ AB \cap AC = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow A'A \perp (ABC) \quad \left. \begin{array}{l} A'A \subset (ABB') \end{array} \right\} \Rightarrow (ABB') \perp (ABC)$$

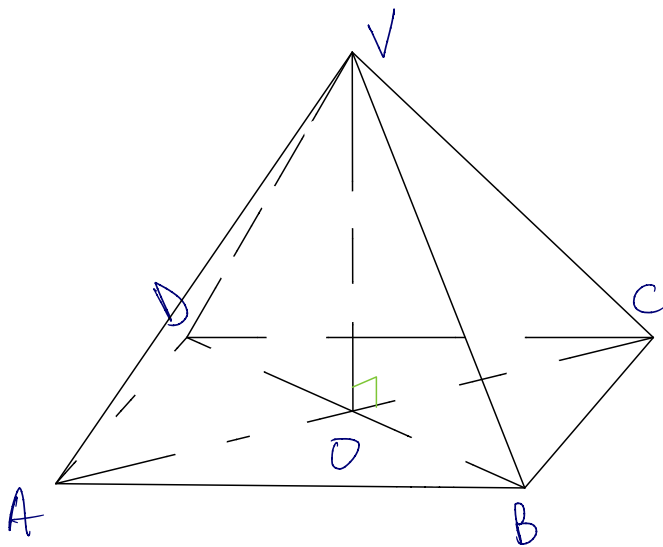
**Exercițiul 3.** În tetraedrul regulat  $ABCD$ , fie  $M$  mijlocul laturii  $BC$ . Știind că înălțimea din  $A$  cade în centrul bazei  $O$  (care se află pe  $DM$ ), precizați dacă planul  $(ADM)$  este perpendicular pe planul  $(ABC)$ .



AO înălțimea tetraedrului  
 $\Rightarrow AO \perp (BCD)$   
 $AO \subset (ADM)$  }  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow (ADM) \perp (BCD)$

**Exercițiul 4.** Se consideră piramida patrulateră regulată  $VABCD$  cu vârful  $V$  și înălțimea  $VO$ .

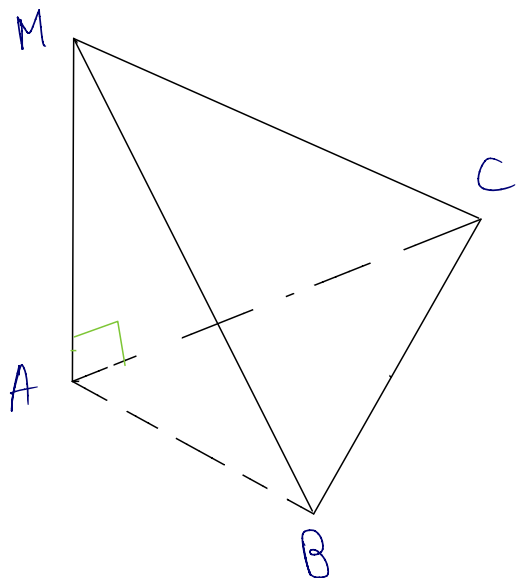
- (a) Arătați că planul diagonal  $(VAC)$  este perpendicular pe planul bazei  $(ABCD)$ .  
 (b) Arătați că planul diagonal  $(VAC)$  este perpendicular pe planul diagonal  $(VBD)$ .



a)  $VO \perp (ABCD)$   
 $VO \subset (VAC)$  }  $\Rightarrow (VAC) \perp (ABCD)$

b)  $BD \perp VO$   
 $BD \perp AC$   
 $VO, AC \subset (VAC)$   
 $VO \cap AC = \{O\}$  }  $\Rightarrow BD \perp (VAC)$   
 $BD \subset (VBD)$  }  $\Rightarrow (VBD) \perp (VAC)$

**Exercițiul 5.** Fie triunghiul dreptunghic isoscel  $ABC$  cu  $\angle A = 90^\circ$ . Pe planul triunghiului se ridică perpendiculara  $MA$ . Demonstrați că planul  $(MAC)$  este perpendicular pe planul  $(MAB)$ .

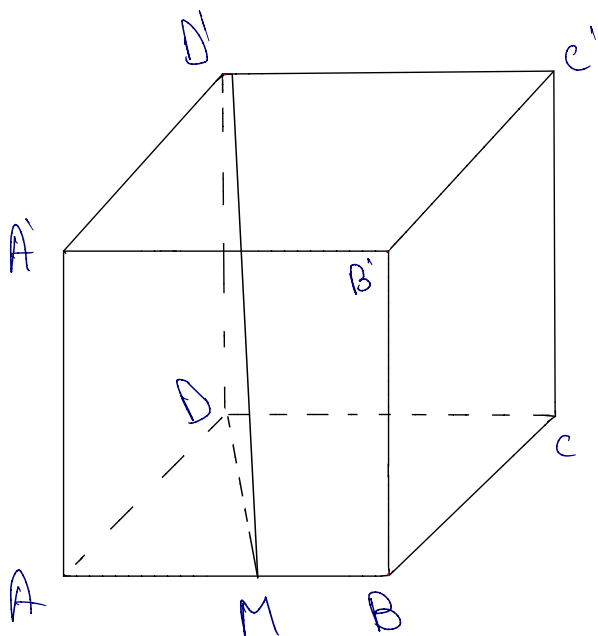


$$\left. \begin{array}{l} MA \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow MA \perp AB$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp MA \\ AB \perp AC (\triangle \text{ dreptunghic}) \\ MA, AC \subset (MAC) \\ MA \cap AC = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (MAC)$$

$$\Rightarrow (MAB) \perp (MAC)$$

**Exercițiul 6.** În cubul  $ABCD A' B' C' D'$ , fie  $M$  mijlocul segmentului  $AB$ . Demonstrați că planul  $(MDD')$  este perpendicular pe planul  $(ABCD)$ .

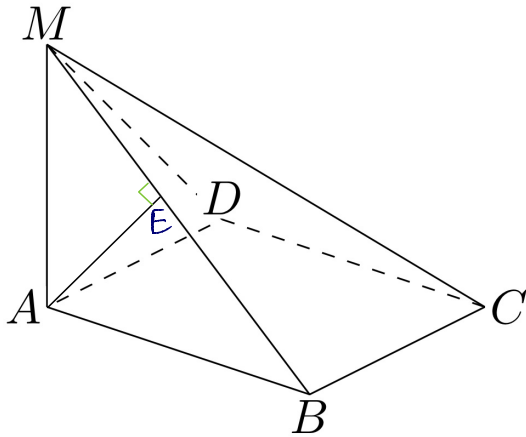


$$\left. \begin{array}{l} D'D \perp (ABCD) \\ D'D \subset (D'DM) \end{array} \right\} \Rightarrow (D'DM) \perp (ABCD)$$

**Exercițiul 7.** Fie dreptunghiul  $ABCD$  și  $MA \perp (ABCD)$ . Construim  $AE \perp MB$ , cu  $E \in MB$ .

(a) Arătați că  $BC \perp (MAB)$ .

(b) Demonstrați că planele  $(ADE)$  și  $(MBC)$  sunt perpendiculare.



$$\left. \begin{array}{l} a) \quad MA \perp (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow MA \perp BC$$

$$BC \perp MA$$

$$BC \perp AB$$

$$MA, AB \subset (MAB)$$

$$MA \cap AB = \{A\}$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp MA \\ BC \perp AB \\ MA, AB \subset (MAB) \\ MA \cap AB = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (MAB)$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \quad BC \perp (MAB) \\ AE \subset (MAB) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp AE$$

$$AE \perp BC$$

$$AE \perp MB$$

$$MB, BC \subset (MBC)$$

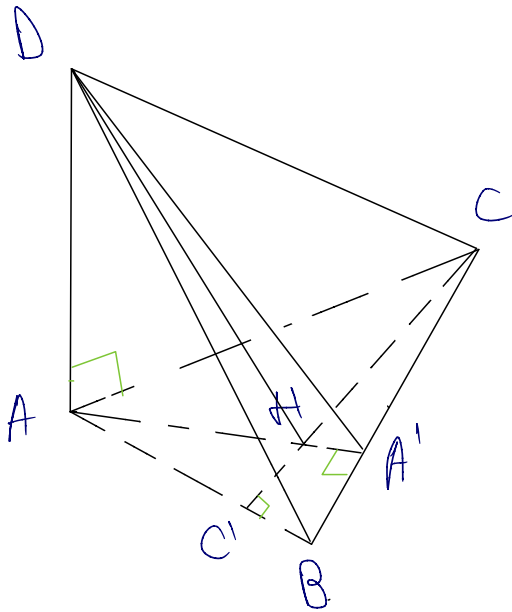
$$MB \cap BC = \{B\}$$

$$\left. \begin{array}{l} AE \perp BC \\ AE \perp MB \\ MB, BC \subset (MBC) \\ MB \cap BC = \{B\} \end{array} \right\} \Rightarrow AE \perp (MBC)$$

$$\left. \begin{array}{l} AE \perp (MBC) \\ AE \subset (ADE) \end{array} \right\} \Rightarrow (ADE) \perp (MBC)$$

**Exercițiul 8.** Fie piramida  $DABC$  cu muchia  $DA$  perpendiculară pe planul bazei  $(ABC)$ . În triunghiul  $ABC$ , fie  $H$  ortocentrul (punctul de intersecție al înălțimilor).

- (a) Demonstrați că dreapta  $BC$  este perpendiculară pe planul  $(DAH)$ .  
 (b) Arătați că planul  $(DBC)$  este perpendicular pe planul  $(DAH)$ .



$$a) (DAH) = (DAA')$$

$$\left. \begin{array}{l} DA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow DA \perp BC$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AA' \\ BC \perp DA \\ DA, AA' \subset (DAA') \\ DA \cap AA' = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (DAA')$$

$$b) \left. \begin{array}{l} BC \perp (DAA') \\ BC \subset (DBC) \end{array} \right\} \Rightarrow (DBC) \perp (DAA')$$