

Fișă de lucru

Lecția 11 – Dreaptă perpendiculară pe un plan

Clasa a 8-a – Capitolul 1 – Geometrie în spațiu

Instrucțiuni

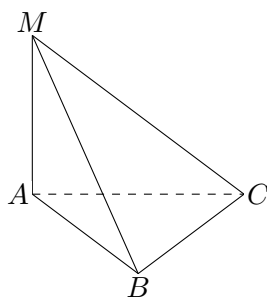
Rezolvă exercițiile folosind definiția dreptei perpendiculare pe un plan, criteriul de perpendicularitate și calculul distanțelor în spațiu. Durata recomandată: **45–50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$.

- (a) Numiți o dreaptă perpendiculară pe planul (ABC) .
- (b) Numiți o dreaptă perpendiculară pe planul (BCC') .
- (c) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $A'A \perp BD$.

Exercițiul 2. Pe planul triunghiului echilateral ABC cu latura de 6 cm se ridică perpendiculara $MA = 8$ cm. Calculați distanța de la punctul M la vârfurile B și C .

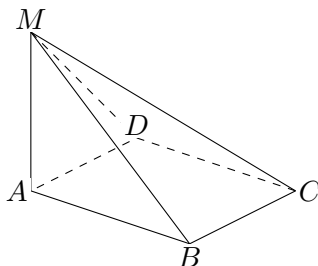


Exercițiul 3. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O . Pe planul pătratului se ridică perpendiculara VO . Precizați măsura unghiului dintre dreptele VO și AC .

Exercițiul 4. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$) cu catetele $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara PA pe planul (ABC) , cu $PA = 10$ cm. Calculați distanța de la punctul P la mijlocul ipotenuzei BC .

Exercițiul 5. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara MA . Știind că $AB = 4$ cm și $MA = 3$ cm, calculați:

- (a) Distanța de la M la B .
- (b) Distanța de la M la C .



Exercițiul 6. Fie rombul $ABCD$ cu diagonalele $AC = 16$ cm și $BD = 12$ cm. Punctul V este exterior planului rombului astfel încât $VA = VC$ și $VB = VD$. Demonstrați că dreapta VO este perpendiculară pe planul (ABC) , unde O este intersecția diagonalelor rombului.

Exercițiul 7. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 20$ cm și $BC = 15$ cm. Pe planul dreptunghiului se ridică perpendiculara $MD = 5$ cm. Calculați distanța de la punctul M la dreapta AC .

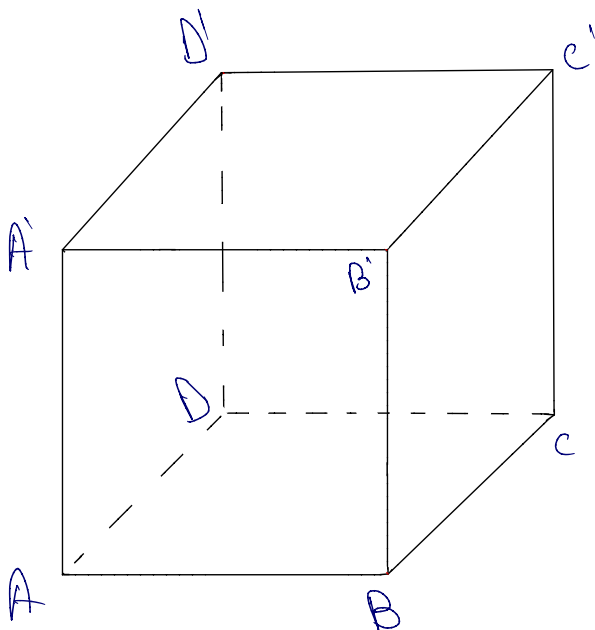
Exercițiul 8. Pe planul pătratului $ABCD$ de centru O , cu latura $AB = 12$ cm, se ridică perpendicularele AM și CP astfel încât $AM = 8$ cm și $CP = 4$ cm. Punctul E este mijlocul segmentului MP .

- (a) Demonstrați că dreapta EO este perpendiculară pe planul (ABC) .
- (b) Calculați lungimea segmentului EO .

Succes!

Exercițiul 1. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$.

- Numiți o dreaptă perpendiculară pe planul (ABC) .
- Numiți o dreaptă perpendiculară pe planul (BCC') .
- Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $A'A \perp BD$.



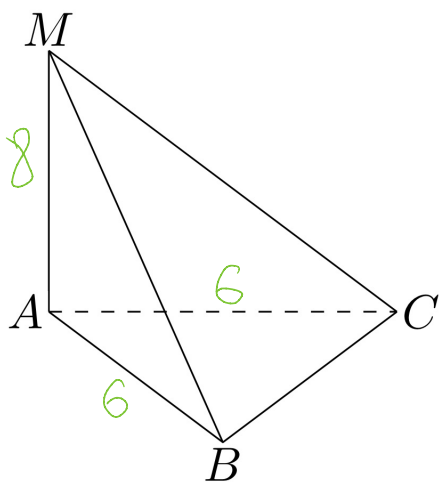
a) $AA'/BB'/CC'/DD'$
Acestea sunt înălțimile
cubului.

b) $AB/CD/A'B'/C'D'$

c) **Adevărat**

$A'A \perp (ABCD)$
 $BD \subset (ABCD)$ } $\Rightarrow A'A \perp BD$

Exercițiul 2. Pe planul triunghiului echilateral ABC cu latura de 6 cm se ridică perpendiculara $MA = 8$ cm. Calculați distanța de la punctul M la vârfurile B și C .



$MB = ? ; MC = ?$

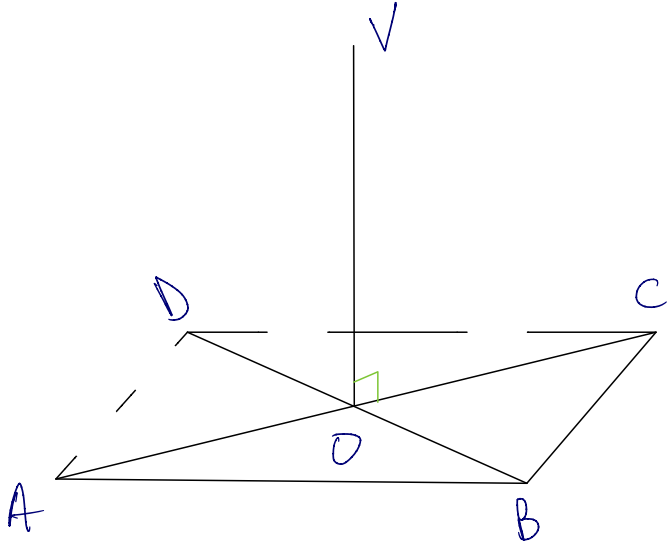
$MA \perp (ABC)$
 $AB \subset (ABC)$ } $\Rightarrow MA \perp AB \Rightarrow \triangle MAB$ dreptunghic

Aplic T.P. în $\triangle MAB$: $MB^2 = MA^2 + AB^2$
 $\Rightarrow MB^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$
 $\Rightarrow MB = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$

$MA \perp (ABC)$
 $AC \subset (ABC)$ } $\Rightarrow MA \perp AC \Rightarrow \triangle MAC$ dreptunghic

Aplic T.P. în $\triangle MAC$: $MC^2 = MA^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$
 $\Rightarrow MC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$

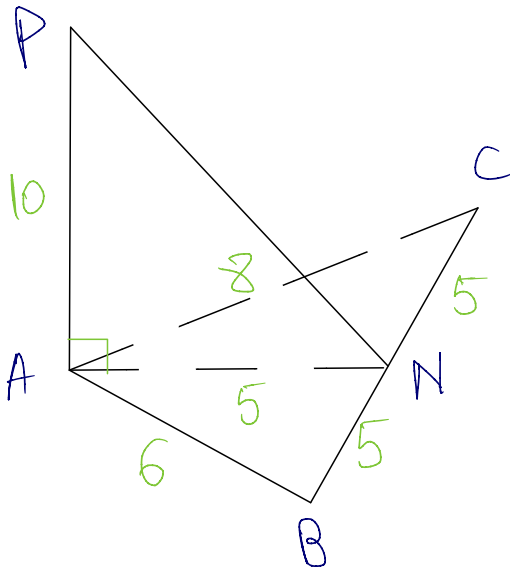
Exercițiul 3. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O . Pe planul pătratului se ridică perpendiculara VO .
Precizați măsura unghiului dintre dreptele VO și AC .



$$\left. \begin{array}{l} VO \perp (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow VO \perp AC$$

$$\Rightarrow \angle(VO, AC) = 90^\circ$$

Exercițiul 4. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$) cu catetele $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm.
În punctul A se ridică perpendiculara PA pe planul (ABC) , cu $PA = 10$ cm. Calculați distanța de la punctul P la mijlocul ipotenuzei BC .



Fie N mijlocul $[BC]$.

În $\triangle ABC$ dreptunghic aplic T.P.:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow BN = NC = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

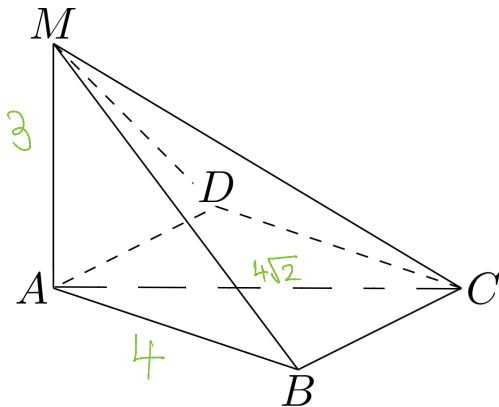
$$AN \text{ mediană} \Rightarrow AN = BN = NC = \frac{BC}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} PA \perp (ABC) \\ AN \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow PA \perp AN \Rightarrow \triangle PAN \text{ dreptunghic}$$

$$\begin{aligned} \text{În } \triangle PAN \text{ aplic T.P.: } PN^2 &= PA^2 + AN^2 = 10^2 + 5^2 = 100 + 25 = 125 \\ \Rightarrow PN &= \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ cm} \end{aligned}$$

Exercițiul 5. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara MA . Știind că $AB = 4$ cm și $MA = 3$ cm, calculați:

- (a) Distanța de la M la B .
(b) Distanța de la M la C .



$$\left. \begin{array}{l} a) MA \perp (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow MA \perp AB$$

În $\triangle MAB$ dreptunghic aplic T.P.:

$$MB^2 = MA^2 + AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

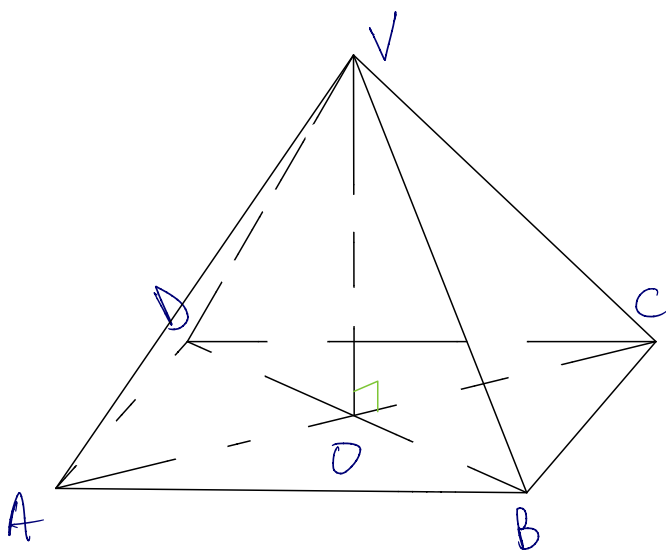
b) $AC = \text{diagonala în pătrat} \Rightarrow AC = l\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

$$\left. \begin{array}{l} MA \perp (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow MA \perp AC$$

În $\triangle MAC$ dreptunghic aplic T.P.: $MC^2 = MA^2 + AC^2$

$$\Rightarrow MC^2 = 3^2 + (4\sqrt{2})^2 = 9 + 32 = 41 \Rightarrow MC = \sqrt{41} \text{ cm}$$

Exercițiul 6. Fie rombul $ABCD$ cu diagonalele $AC = 16$ cm și $BD = 12$ cm. Punctul V este exterior planului rombului astfel încât $VA = VC$ și $VB = VD$. Demonstrați că dreapta VO este perpendiculară pe planul (ABC) , unde O este intersecția diagonalelor rombului.



$$AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow AO = OC \text{ și } BO = OD$$

$$VA = VC \Rightarrow \triangle VAC \text{ isoscel}$$

$$AO = OC \Rightarrow VO \text{ mediană în } \triangle VAC$$

$$\Rightarrow VO \perp AC$$

$$VB = VD \Rightarrow \triangle VBD \text{ isoscel}$$

$$BO = OD \Rightarrow VO \text{ mediană în } \triangle VBD$$

$$\Rightarrow VO \perp BD$$

$$VO \perp AC$$

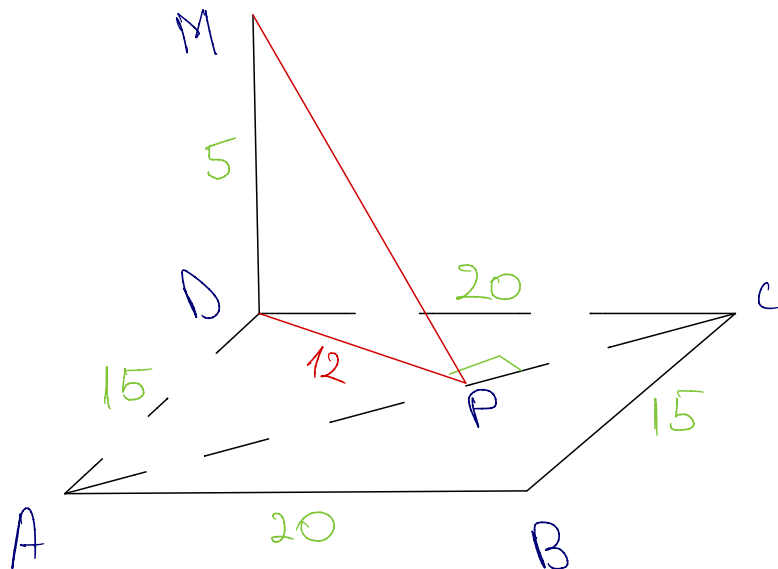
$$VO \perp BD$$

$$AC \cap BD = \{O\}$$

$$AC, BD \subset (ABCD)$$

$$\left. \begin{array}{l} VO \perp AC \\ VO \perp BD \\ AC \cap BD = \{O\} \\ AC, BD \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow VO \perp (ABCD)$$

Exercițiul 7. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 20$ cm și $BC = 15$ cm. Pe planul dreptunghiului se ridică perpendiculara $MD = 5$ cm. Calculați distanța de la punctul M la dreapta AC .



Fie $DP \perp AC, P \in AC$

Vom arăta că:

$$d(M, AC) = MP$$

$ABCD$ dreptunghi $\Rightarrow AB = DC = 20$ cm și $AD = BC = 15$ cm

În $\triangle ADC$ dreptunghi aplic T.P.: $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$$\Rightarrow AC^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 \Rightarrow AC = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} MD \perp (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow MD \perp AC$$

$$\left. \begin{array}{l} DP \perp AC \\ MD \cap DP = \{D\} \\ MD, DP \subset (MDP) \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (MDP)$$

$$\left. \begin{array}{l} MP \subset (MDP) \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp MP \Rightarrow d(M, AC) = MP$$

Pentru a afla DP , scriem aria $\triangle ADC$ în 2 moduri:

$$A_{ABC} = \frac{AD \cdot DC}{2} \quad \left\{ \Rightarrow AD \cdot DC = DP \cdot AC \Rightarrow DP = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ cm} \right.$$

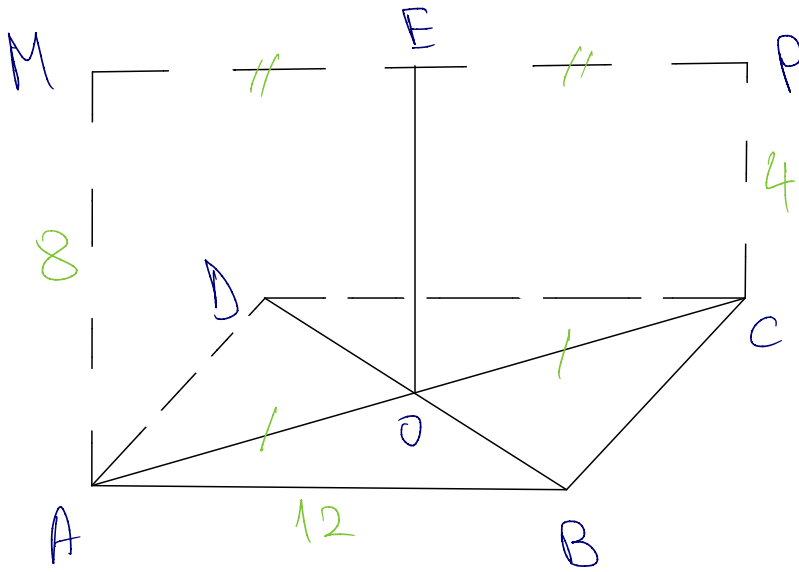
$$A_{ABC} = \frac{DP \cdot AC}{2}$$

$MD \perp (ABCD) \left\{ \Rightarrow MD \perp DP \Rightarrow \triangle MDP \text{ dreptunghi, aplic T.P.} \Rightarrow \right.$

$$DP \subset (ABCD) \Rightarrow MP^2 = MD^2 + DP^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow MP = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

Exercițiul 8. Pe planul pătratului $ABCD$ de centru O , cu latura $AB = 12$ cm, se ridică perpendicularele AM și CP astfel încât $AM = 8$ cm și $CP = 4$ cm. Punctul E este mijlocul segmentului MP .

- (a) Demonstrați că dreapta EO este perpendiculară pe planul (ABC) .
 (b) Calculați lungimea segmentului EO .



$$\left. \begin{array}{l} AM \perp (ABCD) \\ CP \perp (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow AM \parallel CP \Rightarrow AMPC \text{ trapez}$$

$$\left. \begin{array}{l} AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow AO = OC \\ ME = EP \end{array} \right\} \Rightarrow EO \text{ linie mijlocie în } AMPC \text{ trapez} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EO \parallel AM \left. \begin{array}{l} AM \perp (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow EO \perp (ABCD)$$

$$b) EO \text{ linie mijlocie} \Rightarrow EO = \frac{AM + CP}{2} = \frac{8 + 4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$