

Lecție Recapitativă 2: Funcții

Clasa a 8-a – Capitolul 3 - Funcții

Instrucțiuni

Această fișă aprofundează studiul funcțiilor liniare prin probleme de geometrie analitică și relații funcționale.

Reține: Trei puncte A, B, C sunt coliniare dacă punctul C aparține graficului funcției determinat de A și B .

Durata recomandată: **50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră o funcție liniară $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface relația:

$$f(x - 2) = 3x - 5$$

pentru orice x real.

- (a) Calculați $f(0)$.
- (b) Determinați forma generală a funcției $f(x) = ax + b$.

Exercițiul 2. Se consideră punctele $A(1, 3)$, $B(-2, -6)$ și $C(4, 12)$.

- (a) Determinați funcția liniară $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ al cărei grafic trece prin punctele A și B .
- (b) Verificați, prin calcul, dacă punctele A, B și C sunt coliniare.

Exercițiul 3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{3}x - 4$.

- (a) Determinați coordonatele punctelor de intersecție cu axele: A (cu Ox) și B (cu Oy).
- (b) Calculați lungimea segmentului AB .
- (c) Determinați sinusul unghiului format de graficul funcției cu axa Ox (în triunghiul dreptunghic format).

Exercițiul 4. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = x + 2 \quad \text{și} \quad g(x) = -x + 4$$

- (a) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe xOy .
- (b) Aflați coordonatele punctului de intersecție a graficelor, notat cu M .
- (c) Calculați aria triunghiului determinat de graficele celor două funcții și axa Ox .

Exercițiul 5. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$f(x) \cdot f(1) + 2 \cdot f(x + 1) = 14$$

Exercițiul 6. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx - 6$, unde $m > 0$. Determinați valoarea lui m , știind că aria triunghiului format de graficul funcției cu axele de coordonate este egală cu 9 unități de arie.

Exercițiul 7. Fie funcțiile $f(x) = 2x + 5$ și $g(x) = x - 2$. Determinați numerele întregi x care verifică simultan inegalitățile:

$$\begin{cases} f(x) \leq 11 \\ g(x) > -4 \end{cases}$$

Exercițiul 8. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$.

- (a) Arătați că numărul $N = \sqrt{f(2) + f(3) + f(4) + 3}$ este număr natural.
- (b) Determinați un punct $P(a, a)$ situat pe graficul funcției (punctul care are abscisa egală cu ordonata).

Succes!

Exercițiul 1. Se consideră o funcție liniară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface relația:

$$f(x-2) = 3x - 5$$

pentru orice x real.

(a) Calculați $f(0)$.

(b) Determinați forma generală a funcției $f(x) = ax + b$.

a) Pentru a calcula $f(0)$, trebuie ca $x-2=0 \Rightarrow x=2$.

$$f(0) = f(2-2) = 3 \cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1$$

b) Notăm $x-2=t$

$$x-2=t \quad | +2 \quad \Rightarrow x=t+2$$

$$f(x-2) = 3x - 5 \Rightarrow f(t) = 3 \cdot (t+2) - 5 = 3t + 6 - 5 \Rightarrow \underline{f(t) = 3t + 1}$$

Deci, forma generală este: $f(x) = 3x + 1$.

Exercițiul 2. Se consideră punctele $A(1, 3)$, $B(-2, -6)$ și $C(4, 12)$.

(a) Determinați funcția liniară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ al cărei grafic trece prin punctele A și B .

(b) Verificați, prin calcul, dacă punctele A, B și C sunt coliniare.

$$\left. \begin{array}{l} a) A(1, 3) \in G_f \Rightarrow f(1) = 3 \\ f(x) = ax + b \Rightarrow f(1) = a \cdot 1 + b \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = 3$$
$$\left. \begin{array}{l} B(-2, -6) \in G_f \Rightarrow f(-2) = -6 \\ f(-2) = a \cdot (-2) + b \end{array} \right\} \Rightarrow -2a + b = -6$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + b = 3 \quad | \cdot 2 \\ -2a + b = -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} 2a + 2b = 6 \\ -2a + b = -6 \\ \hline 3b = 0 \quad | :3 \\ b = 0 \end{array} \quad (+)$$

$$a + b = 3 \Rightarrow a + 0 = 3 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot x + 0 \Rightarrow f(x) = 3x$$

b) Punctele sunt coliniare dacă $C(4, 12) \in G_f \Rightarrow f(4) = 12$

$$f(4) = 3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow \text{Adevărat}$$

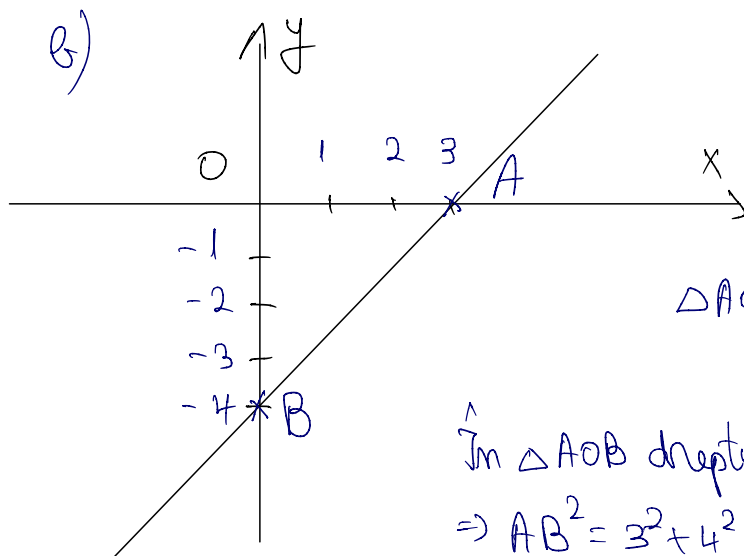
Exercițiul 3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{3}x - 4$.

- (a) Determinați coordonatele punctelor de intersecție cu axele: A (cu Ox) și B (cu Oy).
- (b) Calculați lungimea segmentului AB .
- (c) Determinați sinusul unghiului format de graficul funcției cu axa Ox (în triunghiul dreptunghic format).

a) $f \cap Ox: f(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}x - 4 = 0 \quad | +4$

$$\frac{4}{3}x = 4 \quad | \cdot 3 \Rightarrow 4x = 12 \quad | :4 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, 0)$$

$f \cap Oy: x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{4}{3} \cdot 0 - 4 = 0 - 4 = -4 \Rightarrow B(0, -4)$



$\triangle AOB$ dreptunghic: $OA = 3$
 $OB = |-4| = 4$

În $\triangle AOB$ dreptunghic aplic T.P.: $AB^2 = OA^2 + OB^2$
 $\Rightarrow AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow AB = \sqrt{25} = 5$

c) $\sin(\widehat{OAx}, \widehat{AB}) = \sin \widehat{OAB}$

În $\triangle AOB$ dreptunghic: $\sin \widehat{OAB} = \frac{OB}{AB} = \frac{4}{5} = 0,8$

Exercițiul 4. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = x + 2 \quad \text{și} \quad g(x) = -x + 4$$

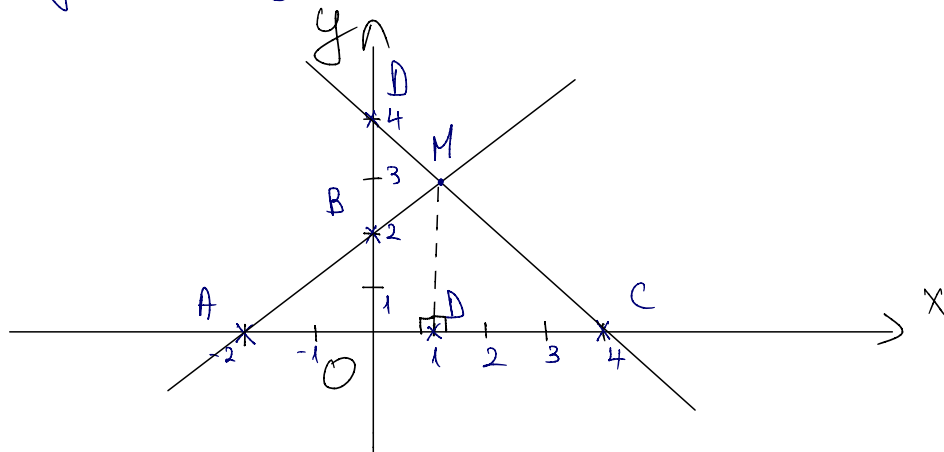
- (a) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe xOy .
- (b) Aflați coordonatele punctului de intersecție a graficelor, notat cu M .
- (c) Calculați aria triunghiului determinat de graficele celor două funcții și axa Ox .

a) $f \cap Ox: f(x) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \quad | -2$
 $x = -2 \Rightarrow A(-2, 0)$

$f \cap Oy: x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 2 = 2 \Rightarrow B(0, 2)$

$g \cap Ox: g(x) = 0 \Rightarrow -x + 4 = 0 \quad | -4$
 $-x = -4 \quad | \cdot (-1)$
 $x = 4 \Rightarrow C(4, 0)$

$g \cap Oy: x = 0 \Rightarrow g(0) = -0 + 4 = 4 \Rightarrow D(0, 4)$



b) Intersecția: $f(x) = g(x) \Rightarrow x + 2 = -x + 4 \Rightarrow x + x = 4 - 2$
 $2x = 2 \quad | :2 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1 + 2 = 3$
 $g(1) = -1 + 4 = 3$
 $\Rightarrow f \cap g = M(1, 3)$

c) $G_f \cap Ox = A$
 $G_g \cap Ox = C$
 $\Rightarrow \triangle AMC$

De pe grafic: $AC = 6$ unități

Fie $M \in \perp AC$, $N \in AC$.

Cum $M(1, 3) \Rightarrow MN = 3$ unități (de pe Oy)

$$A_{AMC} = \frac{MN \cdot AC}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 3 \cdot 3 \Rightarrow A_{AMC} = 9$$

Exercițiul 5. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$f(x) \cdot f(1) + 2 \cdot f(x+1) = 14$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$f(x+1) = 2(x+1) - 3 = 2x + 2 - 3 = 2x - 1$$

$$f(x) \cdot f(1) + 2 \cdot f(x+1) = 14 \Rightarrow (2x-3) \cdot (-1) + 2 \cdot (2x-1) = 14$$

$$\Rightarrow -2x + 3 + 4x - 2 = 14 \Rightarrow -2x + 4x = 14 + 2 - 3$$

$$2x = 13 \quad | :2$$

$$x = \frac{13}{2} = 6,5$$

Exercițiul 6. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx - 6$, unde $m > 0$. Determinați valoarea lui m , știind că aria triunghiului format de graficul funcției cu axele de coordonate este egală cu 9 unități de arie.

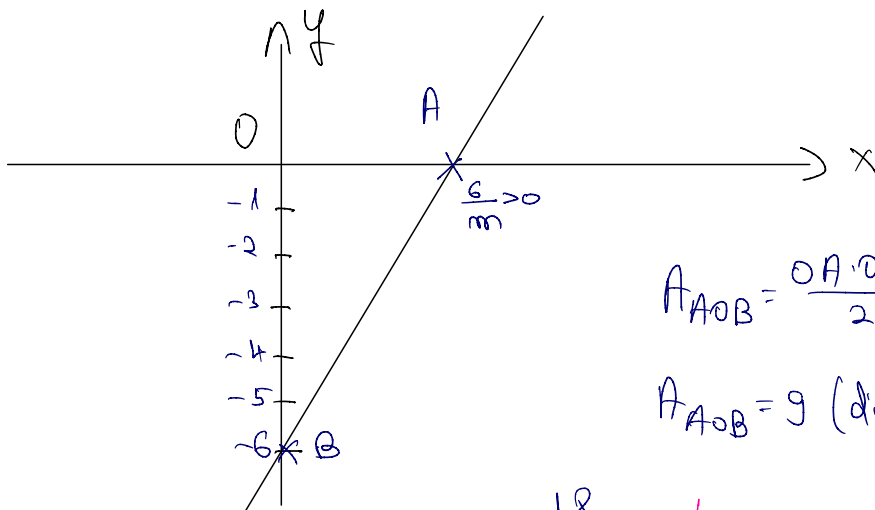
$$f \cap O_x: f(x) = 0 \Rightarrow mx - 6 = 0 \quad | +6$$

$$mx = 6 \quad | :m$$

$$x = \frac{6}{m} \Rightarrow A\left(\frac{6}{m}, 0\right)$$

$$f \cap O_y: x = 0 \Rightarrow f(0) = m \cdot 0 - 6 = 0 - 6 = -6 \Rightarrow B(0, -6)$$

$$m > 0 \Rightarrow \frac{6}{m} > 0$$



$$A_{AOB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{\frac{6}{m} \cdot 6}{2} = \frac{36}{2m} = \frac{18}{m}$$

$$A_{AOB} = 9 \text{ (din enunțul)}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{m} = 9 \quad | \cdot m$$

$$18 = 9m \quad | :9 \Rightarrow m = 2$$

Exercițiul 7. Fie funcțiile $f(x) = 2x + 5$ și $g(x) = x - 2$. Determinați numerele întregi x care verifică simultan inegalitățile:

$$\begin{cases} f(x) \leq 11 \\ g(x) > -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} f(x) &\leq 11 \\ f(x) &= 2x + 5 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow 2x + 5 \leq 11 \quad | -5 \\ &2x \leq 6 \quad | :2 \\ &x \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} g(x) &> -4 \\ g(x) &= x - 2 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x - 2 > -4 \quad | +2 \\ &x > -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x &\leq 3 \\ x &> -2 \\ x &\in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Exercițiul 8. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$.

- (a) Arătați că numărul $N = \sqrt{f(2) + f(3) + f(4) + 3}$ este număr natural.
 (b) Determinați un punct $P(a, a)$ situat pe graficul funcției (punctul care are abscisa egală cu ordonata).

$$a) f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 8 - 4 = 4$$

$$N = \sqrt{f(2) + f(3) + f(4) + 3} = \sqrt{0 + 2 + 4 + 3} = \sqrt{9} = 3 \quad \left. \begin{aligned} 3 \in \mathbb{N} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N \in \mathbb{N}$$

$$b) \left. \begin{aligned} P(a, a) \in G_f &\Rightarrow f(a) = a \\ f(a) &= 2a - 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a - 4 = a \Rightarrow 2a - a = 4 \Rightarrow a = 4$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow P(4, 4) \in G_f$$