

Fișă de lucru

Lecția 9 - Operații cu fracții algebrice

Clasa a 8-a – Capitolul 2 - Calcul algebric în R

Instrucțiuni

Încearcă să rezolvi toate exercițiile fără ajutor. Durata recomandată:
30–40 de minute.

Exerciții

Exercițiul 1. Indicați **domeniul de definiție** și **simplificați** fiecare fracție algebrică:

(a) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$

(b) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$

(c) $\frac{3x^2 - 12x}{x^2 - 16}$

(d) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}$

Rezolvare:

Metodă: factorizăm și tăiem factorii comuni; domeniul exclude zerourile numitorului inițial.

(a) $\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}, \quad DD: x \neq 3, -2.$

(b) $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x-1}{x-3}, \quad DD: x \neq 3, -1.$

(c) $\frac{3x(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{3x}{x+4}, \quad DD: x \neq -4, 4.$

(d) $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$ (nu se mai simplifică), $DD: x \neq 1, -1.$

Exercițiul 2. Efectuați **adunări/scăderi** de fracții algebrice (rezultatul în formă simplificată). Indicați restricțiile pentru x :

$$(a) \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2}$$

$$(b) \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x}$$

$$(c) \frac{x+3}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x-2}$$

$$(d) \frac{2x-1}{x^2-4} - \frac{x+3}{x+2}$$

Rezolvare:

Aducem la același numitor și operăm numărătorii.

$$(a) \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2) - 3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{7-x}{(x-1)(x+2)}, \quad x \neq 1, -2.$$

$$(b) \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + (x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)}, \quad x \neq 0, -1.$$

$$(c) \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{x-2} = \frac{(x+3) - (x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{6}{(x-2)(x-3)}, \quad x \neq 2, 3.$$

$$(d) \frac{2x-1}{(x-2)(x+2)} - \frac{x+3}{x+2} = \frac{(2x-1) - (x+3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-x^2 + x + 5}{(x-2)(x+2)}, \quad x \neq \pm 2.$$

Exercițiul 3. Efectuați **înmulțiri/împărțiri** de fracții algebrice și simplificați:

$$(a) \left(\frac{x^2-4}{x^2-x-6} \right) \cdot \frac{x-3}{x-2}$$

$$(b) \frac{x+5}{x^2-25} : \frac{x-5}{x+5}$$

$$(c) \left(\frac{x^2-9}{3x} \right) \cdot \frac{6x}{x+3}$$

Rezolvare:

Factorizăm și tăiem; la „:” înmulțim cu inversa.

$$(a) \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} \cdot \frac{x-3}{x-2} = 1, \quad DD: x \neq 3, -2, 2.$$

$$(b) \frac{x+5}{(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x+5}{x-5} = \frac{x+5}{(x-5)^2}, \quad DD: x \neq \pm 5.$$

$$(c) \frac{(x-3)(x+3)}{3x} \cdot \frac{6x}{x+3} = 2(x-3), \quad DD: x \neq 0, -3.$$

Exercițiul 4. Simplificați **fracția complexă** (menționați domeniul):

$$\frac{\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}.$$

Rezolvare:

Diferență de fracții: $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{B-A}{AB}.$

$$\frac{\frac{(x+3)-(x-3)}{(x-3)(x+3)}}{\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}} = \frac{\frac{6}{x^2-9}}{\frac{2}{x^2-1}} = \frac{6}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-1}{2} = 3 \cdot \frac{x^2-1}{x^2-9}.$$

$DD: x \neq \pm 1, \pm 3.$

Exercițiul 5. Folosind *formulele de calcul prescurtat*, simplificați:

$$(a) \frac{a^3 - b^3}{a^2 - ab + b^2}$$

$$(b) \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4x + 4}$$

$$(c) \frac{y^3 + 8}{y + 2}$$

$$(d) \frac{m^2 - n^2}{m - n} - (m + n)$$

Rezolvare:

Identități: $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2),$
 $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2), \quad A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$

$$(a) \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2-ab+b^2} \quad (\text{nu se mai simplifică în general}).$$

$$(b) \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)^2} = \frac{(x+2)(x^2+4)}{x-2}, \quad x \neq 2.$$

$$(c) \frac{(y+2)(y^2-2y+4)}{y+2} = y^2 - 2y + 4, \quad y \neq -2.$$

$$(d) \frac{(m-n)(m+n)}{m-n} - (m+n) = (m+n) - (m+n) = 0, \quad m \neq n.$$

Exercițiul 6. Stabiliți **pentru ce valori** ale lui t este definită expresia și **simplificați**:

$$F(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{t - 1} \right) \cdot \left(\frac{t + 2}{t^2 - 4} \right).$$

Rezolvare:

Factorizăm: $t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$, $t^2 - 4 = (t - 2)(t + 2)$.

$$F(t) = \frac{(t - 1)(t + 1)}{t - 1} \cdot \frac{t + 2}{(t - 2)(t + 2)} = \frac{t + 1}{t - 2}.$$

DD: $t \neq 1, \pm 2$ (chiar dacă s-au simplificat, restricțiile rămân).

Exercițiul 7. Determinați **toate valorile întregi** ale lui x pentru care

$$E(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{x - 1}$$

este **număr întreg**. (Menționați valorile interzise și justificați.)

Rezolvare:

Împărțire polinomială: $3x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(3x + 8) + 6$.

$$E(x) = 3x + 8 + \frac{6}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

Pentru $E(x) \in \mathbb{Z}$, trebuie ca $\frac{6}{x - 1} \in \mathbb{Z}$, adică $x - 1 \mid 6$.

$$x - 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \Rightarrow x \in \{2, 3, 4, 7, 0, -1, -2, -5\}.$$

Exercițiul 8. Fie

$$G(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} + \frac{2x}{x - 3}.$$

- Determinați **domeniul de definiție** al lui G .
- Simplificați** expresia $G(x)$.
- Calculați $G(0)$ și $G(4)$.

Rezolvare:

Aducem la același numitor $(x - 3)(x + 3)$.

(a) DD: $x \neq \pm 3$ (denumitorii $x^2 - 9$ și $x - 3$).

(b)

$$G(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} + \frac{2x(x + 3)}{x^2 - 9} = \frac{3x^2 + 6x - 1}{x^2 - 9}.$$

$$(c) \quad G(0) = \frac{-1}{-9} = \frac{1}{9}, \quad G(4) = \frac{3 \cdot 16 + 24 - 1}{16 - 9} = \frac{71}{7}.$$