

Rezolvare - Fișă de lucru

Lecția 8 - Frații algebrice. Amplificarea. Simplificarea

Clasa a 8-a – Capitolul 2 - Calcul algebric în R

Instrucțiuni

Încearcă să rezolvi toate exercițiile fără ajutor. Durata recomandată:
30–40 de minute.

Exerciții

Exercițiul 1. Condiții de definiție. Pentru fiecare fracție algebrică, determină mulțimea valorilor lui x pentru care *fracția este definită*:

(a) $\frac{x+2}{x-3}$

(b) $\frac{2x-1}{x^2-9}$

(c) $\frac{x^2+1}{x^2-2x-3}$

(d) $\frac{x-4}{x^2-5x+6}$

(e) $\frac{3}{x(x+1)}$

(f) $\frac{2x}{x^2-4x+4}$

Rezolvare:

Regulă: o fracție este definită când numitorul $\neq 0$.

(a) $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3.$

(b) $x^2-9 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3.$

(c) $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 3, -1.$

(d) $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2, 3.$

$$(e) \ x(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, -1.$$

$$(f) \ x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2.$$

Exercițiul 2. Evaluari pe funcții raționale. Se consideră $F(x) = \frac{x-2}{x^2+2}$. Calculează:

$$(a) \ F(0), \quad F(2), \quad F(-3);$$

$$(b) \ F(x) - F(-x) \text{ (simplifică rezultatul, menționând condițiile de definiție).}$$

Rezolvare:

Observație: $x^2 + 2 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci F este definită pe $\mathbb{R}$.

$$(a) \ F(0) = \frac{-2}{2} = -1; \quad F(2) = \frac{0}{6} = 0; \quad F(-3) = \frac{-5}{11} = -\frac{5}{11}.$$

(b)

$$F(x) - F(-x) = \frac{x-2}{x^2+2} - \frac{-x-2}{x^2+2} = \frac{(x-2) + (x+2)}{x^2+2} = \frac{2x}{x^2+2}.$$

Definit pentru toate $x \in \mathbb{R}$, deoarece $x^2 + 2 \neq 0$.

Exercițiul 3. Amplificare. Amplifică fiecare fracție cu expresia indicată (și menționează condiția $E(x) \neq 0$ pentru amplificare):

$$(a) \ \frac{2}{x+3} \text{ cu } E(x) = x-5;$$

$$(b) \ \frac{x-1}{x+2} \text{ cu } E(x) = 3x;$$

$$(c) \ \frac{2x}{x-1} \text{ cu } E(x) = x+1;$$

$$(d) \ \frac{x+4}{x^2-16} \text{ cu } E(x) = x-3.$$

Rezolvare:

Regulă: $\frac{A}{B} \cdot \frac{E}{E} = \frac{AE}{BE}$, cu $B \neq 0$ și $E \neq 0$.

$$(a) \ \frac{2}{x+3} \cdot \frac{x-5}{x-5} = \frac{2(x-5)}{(x+3)(x-5)}, \quad \text{cond.: } x \neq -3, 5.$$

$$(b) \ \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{3x}{3x} = \frac{3x(x-1)}{3x(x+2)}, \quad \text{cond.: } x \neq -2, 0.$$

$$(c) \ \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x(x+1)}{x^2-1}, \quad \text{cond.: } x \neq \pm 1.$$

$$(d) \ \frac{x+4}{x^2-16} \cdot \frac{x-3}{x-3} = \frac{(x+4)(x-3)}{(x^2-16)(x-3)}, \quad \text{cond.: } x \neq \pm 4, 3.$$

Exercițiul 4. Amplificare la un numitor dorit. Determină expresia $E(x)$ cu care trebuie amplificată fracția pentru ca *numitorul* să devină cel dat; scrie fracția obținută și condițiile:

- (a) $\frac{x+3}{x-2} \longrightarrow$ numitor $x^2 - 4$;
 (b) $\frac{x-1}{x+2} \longrightarrow$ numitor $x^2 + 3x + 2$;
 (c) $\frac{2x-1}{2x+1} \longrightarrow$ numitor $4x^2 - 1$.

Rezolvare:

Idee: completăm factorii lipsă ai numitorului-țintă.

$$\begin{aligned} (a) \quad x^2 - 4 &= (x-2)(x+2) \Rightarrow E(x) = x+2. \\ \frac{x+3}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x+2} &= \frac{(x+3)(x+2)}{x^2-4}, \quad x \neq 2, -2. \\ (b) \quad x^2 + 3x + 2 &= (x+1)(x+2) \Rightarrow E(x) = x+1. \\ \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x+1} &= \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)}, \quad x \neq -2, -1. \\ (c) \quad 4x^2 - 1 &= (2x-1)(2x+1) \Rightarrow E(x) = 2x-1. \\ \frac{2x-1}{2x+1} \cdot \frac{2x-1}{2x-1} &= \frac{(2x-1)^2}{4x^2-1}, \quad x \neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercițiul 5. Simplificare prin factorizare. Menționează condițiile de definiție, apoi simplifică complet:

- (a) $\frac{x^2-9}{x^2-3x}$
 (b) $\frac{4x^2-1}{2x-1}$
 (c) $\frac{x^2-5x}{x^2-25}$
 (d) $\frac{x^2+3x}{x^2-9x}$

Rezolvare:

Pași: (1) factorizăm; (2) notăm valorile interzise; (3) simplificăm.

$$(a) \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}, \quad x \neq 0, 3 \Rightarrow \frac{x+3}{x}.$$

$$(b) \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1}, \quad x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow 2x+1.$$

$$(c) \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)}, \quad x \neq \pm 5 \Rightarrow \frac{x}{x+5}.$$

$$(d) \frac{x(x+3)}{x(x-9)}, \quad x \neq 0, 9 \Rightarrow \frac{x+3}{x-9}.$$

Exercițiul 6. Frații complexe. Simplifică, folosind amplificarea cu cel mai mic multiplu comun al numitorilor interni (precizează valorile interzise):

$$(a) \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x-2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}}$$

$$(b) \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{\frac{2}{x^2-1}}$$

Rezolvare:

Amplificăm numărătorul și numitorul cu c.m.m.m.c. al numitorilor interni.

$$(a) \text{ numitor comun} = x(x-2), \quad x \neq 0, 2.$$

$$\frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x-2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}} = \frac{2(x-2) + 3x}{x-2-x} = \frac{5x-4}{-2} = \frac{4-5x}{2}.$$

$$(b) x^2 - 1 = (x-1)(x+1), \quad x \neq \pm 1.$$

$$\frac{\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{\frac{2}{x^2-1}} = \frac{x(x-1) - (x+1)}{2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{2}.$$

Exercițiul 7. Egalități obținute prin amplificare. Verifică (pentru valorile admise) că egalitățile sunt adevărate, indicând cu ce expresie s-a făcut amplificarea:

$$(a) \frac{x+2}{x+3} = \frac{x^2-4}{x^2+x-6}$$

$$(b) \frac{x-1}{x+2} = \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$$

$$(c) \frac{3x}{x-5} = \frac{9x^2}{3x(x-5)}$$

Rezolvare:

Verificăm factorizând termenul din dreapta și observând „factorul de amplificare”.

$$(a) \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+2}{x+3},$$

amplificare cu $E(x) = x-2$; cond.: $x \neq -3, 2$.

$$(b) \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x-1}{x+2},$$

amplificare cu $E(x) = x+1$; cond.: $x \neq -2, -1$.

$$(c) \frac{9x^2}{3x(x-5)} = \frac{3x}{x-5},$$

amplificare cu $E(x) = 3x$; cond.: $x \neq 0, 5$.

Exercițiul 8. Parametri și simplificare. Pentru $a \in R$, studiază fracția

$$\frac{x^2 - ax}{x^2 - a^2}.$$

- (a) Menționează condițiile de definiție în funcție de a .
- (b) Arată că se poate simplifica prin $x - a$ și scrie forma simplificată.
- (c) Pentru ce valori ale lui a forma simplificată este definită în plus față de fracția inițială?

Rezolvare:

Factorizăm: $x^2 - ax = x(x - a)$, $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$.

(a) *Condiții: $x^2 - a^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq a, x \neq -a$.*

(b) *Pentru $x \neq a$:*

$$\frac{x^2 - ax}{x^2 - a^2} = \frac{x(x - a)}{(x - a)(x + a)} = \frac{x}{x + a}.$$

(c) *Forma simplificată $\frac{x}{x + a}$ este definită pentru $x \neq -a$.*

Punctul $x = a$ (interzis inițial) devine permis în forma simplificată dacă $a \neq 0$ (căci atunci $x = a = -a$ ar încălca $x \neq -a$).

Răspuns: *pentru toate $a \neq 0$, forma simplificată este definită și în punctul $x = a$ (valoare $\frac{1}{2}$), deci este „în plus” față de fracția inițială.*