



Fișă de lucru

## Lecția 6 - Raționalizarea numitorilor

Clasa a 8-a – Capitolul 2 - Calcul algebric în  $R$

### Instrucțiuni

Încearcă să rezolvi toate exercițiile fără ajutor. Durata recomandată: **30–40 de minute**. Nu oferi soluții în fișă. La finalul fiecărui calcul, **numitorul trebuie să fie rațional**.

### Exerciții

**Exercițiul 1.** Scrie **conjugata** fiecărei expresii:

- (a)  $2 - \sqrt{5}$
- (b)  $7 + 2\sqrt{3}$
- (c)  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$
- (d)  $5\sqrt{7} - 3\sqrt{5}$
- (e)  $4 - \sqrt{10}$

**Rezolvare:**

*Principiu: conjugata lui  $A \pm B$  este  $A \mp B$ .*

$$\begin{aligned} (a) & 2 + \sqrt{5}, & (b) & 7 - 2\sqrt{3}, & (c) & \sqrt{6} + \sqrt{2}, \\ (d) & 5\sqrt{7} + 3\sqrt{5}, & (e) & 4 + \sqrt{10}. \end{aligned}$$

**Exercițiul 2.** Raționalizează numitorul:

- (a)  $\frac{5}{\sqrt{2}}$
- (b)  $\frac{7}{2\sqrt{3}}$

$$(c) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}$$

$$(d) \frac{12}{3\sqrt{5}}$$

$$(e) \frac{9}{4\sqrt{7}}$$

**Rezolvare:**

*Formulă:*  $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ ;  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

$$(a) \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$(b) \frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{7\sqrt{3}}{6}.$$

$$(c) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(d) \frac{12}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

$$(e) \frac{9}{4\sqrt{7}} = \frac{9\sqrt{7}}{28}.$$

**Exercițiul 3.** Raționalizează numitorul și **simplifică**:

$$(a) \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$(b) \frac{3}{\sqrt{5} - 2}$$

$$(c) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$(d) \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

$$(e) \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$(f) \frac{5}{2 + \sqrt{7}}$$

**Rezolvare:**

*Formulă:*  $\frac{1}{A \pm B} \cdot \frac{A \mp B}{A \mp B} = \frac{A \mp B}{A^2 - B^2}$ .

$$(a) \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1.$$

$$(b) \frac{3}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 3(\sqrt{5}+2).$$

$$(c) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 6-2\sqrt{6}.$$

$$(d) \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{10}+2)}{5-2} = \frac{2\sqrt{10}+4}{3}.$$

$$(e) \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}.$$

$$(f) \frac{5}{2+\sqrt{7}} \cdot \frac{2-\sqrt{7}}{2-\sqrt{7}} = \frac{5(2-\sqrt{7})}{4-7} = \frac{5(\sqrt{7}-2)}{3}.$$

**Exercițiul 4.** Calculează expresiile (folosește fracții echivalente și conjugate):

$$(a) \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$(b) \frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1}$$

$$(c) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$(d) \frac{2}{1-\sqrt{2}} + \frac{3}{1+\sqrt{2}}$$

**Rezolvare:**

*Truc: aducem la același numitor folosind  $A^2 - B^2$ .*

$$(a) \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})}{(2)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4}{4 - 3} = 4.$$

$$(b) \frac{1}{\sqrt{5} - 1} - \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{(\sqrt{5} + 1) - (\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$(c) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}[(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})]}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{6}.$$

$$(d) \frac{2}{1 - \sqrt{2}} + \frac{3}{1 + \sqrt{2}} = (-2 - 2\sqrt{2}) + (-3 + 3\sqrt{2}) = -5 + \sqrt{2}.$$

**Exercițiul 5.** Efectuează și adu rezultatul la formă **simplificată**:

$$(a) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$(b) \frac{3}{\sqrt{7} + 2} - \frac{2}{\sqrt{7} - 2}$$

$$(c) \left( \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

**Rezolvare:**

*Raționalizăm fiecare termen și adunăm/scădem.*

$$(a) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$(b) \frac{3}{\sqrt{7} + 2} = \frac{3(\sqrt{7} - 2)}{3} = \sqrt{7} - 2, \quad \frac{2}{\sqrt{7} - 2} = \frac{2(\sqrt{7} + 2)}{3} = \frac{2\sqrt{7} + 4}{3}.$$

$$\Rightarrow (\sqrt{7} - 2) - \frac{2\sqrt{7} + 4}{3} = \frac{3\sqrt{7} - 6 - 2\sqrt{7} - 4}{3} = \frac{\sqrt{7} - 10}{3}.$$

$$(c) \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{2(5 - 3)} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{4} = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}.$$

**Exercițiul 6.** Medii ale unor numere cu radicali:

(a) Determină **media geometrică** a numerelor  $9 - 4\sqrt{5}$  și  $9 + 4\sqrt{5}$ .

(b) Determină **media geometrică** a numerelor  $25 - 9\sqrt{7}$  și  $25 + 9\sqrt{7}$ .

**Rezolvare:**

*Media geometrică a  $u, v > 0$  este  $\sqrt{uv}$ ; folosim  $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ .*

$$(a) \sqrt{(9 - 4\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})} = \sqrt{9^2 - (4\sqrt{5})^2} = \sqrt{81 - 80} = 1.$$

$$(b) \sqrt{(25 - 9\sqrt{7})(25 + 9\sqrt{7})} = \sqrt{25^2 - (9\sqrt{7})^2} = \sqrt{625 - 567} = \sqrt{58}.$$

**Exercițiul 7.** Pentru  $x > 1$ , raționalizează și simplifică:

$$(a) \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$(b) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2}{\sqrt{x} - 2}$$

**Rezolvare:**

*Folosim numitorul comun  $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = x - 1$  și  $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2) = x - 4$ .*

$$(a) \frac{(\sqrt{x} - 1) + (\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \frac{2\sqrt{x}}{x - 1} \quad (\text{numitor rațional}).$$

$$(b) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) - 2(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} \\ = \frac{x - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 4}{x - 4} = \frac{x - 4\sqrt{x} - 4}{x - 4}.$$

**Exercițiul 8.** Fie  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$  și  $b = \frac{5}{\sqrt{3}}$ . Calculează, după raționalizarea numitorilor:

(a)  $a + b$

(b)  $ab$

(c)  $a^2 + b^2$

(d)  $\frac{a}{b}$

**Rezolvare:**

*Raționalizăm:*  $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $b = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ .

$$(a) a + b = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

$$(b) ab = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{10}{3}.$$

$$(c) a^2 + b^2 = \frac{4}{3} + \frac{25}{3} = \frac{29}{3}.$$

$$(d) \frac{a}{b} = \frac{2/\sqrt{3}}{5/\sqrt{3}} = \frac{2}{5}.$$

**Succes!**