

Rezolvare - Fișă de lucru

Lecția 5 - Alte formule de calcul prescurtat

Clasa a 8-a – Capitolul 2 - Calcul algebric în R

Instrucțiuni

Încearcă să rezolvi toate exercițiile fără ajutor. Durata recomandată:
30–40 de minute.

Exerciții

Exercițiul 1. Dezvoltări cu $(a \pm b)^3$. Efectuați, folosind formulele pentru cubul unui binom:

(a) $(x - 4)^3$

(b) $(3y + 1)^3$

(c) $(2a - b)^3$

(d) $(m + 5)^3$

Rezolvare:

Formule: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$$(a) (x - 4)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 - 4^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64.$$

$$(b) (3y + 1)^3 = (3y)^3 + 3(3y)^2 \cdot 1 + 3(3y) \cdot 1^2 + 1^3 = 27y^3 + 27y^2 + 9y + 1.$$

$$(c) (2a - b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2b + 3(2a)b^2 - b^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3.$$

$$(d) (m + 5)^3 = m^3 + 3m^2 \cdot 5 + 3m \cdot 5^2 + 5^3 = m^3 + 15m^2 + 75m + 125.$$

Exercițiul 2. Pătratul trinomului. Dezvoltați folosind $(a + b + c)^2$:

(a) $(2x - y + 3)^2$

(b) $(p + q + 1)^2$

(c) $(3a - 2b + c)^2$

$$(d) (1 - u + 2v)^2$$

Rezolvare:

Formulă: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

$$(a) (2x - y + 3)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + 3^2 + 2(2x)(-y) + 2(2x)3 + 2(-y)3 \\ = 4x^2 + y^2 + 9 - 4xy + 12x - 6y.$$

$$(b) (p + q + 1)^2 = p^2 + q^2 + 1 + 2pq + 2p + 2q.$$

$$(c) (3a - 2b + c)^2 = (3a)^2 + (-2b)^2 + c^2 + 2(3a)(-2b) + 2(3a)c + 2(-2b)c \\ = 9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12ab + 6ac - 4bc.$$

$$(d) (1 - u + 2v)^2 = 1 + u^2 + 4v^2 + 2(1)(-u) + 2(1)(2v) + 2(-u)(2v) \\ = u^2 - 4uv + 4v^2 - 2u + 4v + 1.$$

Exercițiul 3. Sumă și diferență de cuburi. Factorizați:

$$(a) a^3 + 64$$

$$(b) 27x^3 - y^3$$

$$(c) 1 + 8m^3$$

$$(d) 125p^3 - 8$$

Rezolvare:

Formule: $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$,

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

$$(a) a^3 + 64 = a^3 + 4^3 = (a + 4)(a^2 - 4a + 16).$$

$$(b) 27x^3 - y^3 = (3x)^3 - y^3 = (3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2).$$

$$(c) 1 + 8m^3 = 1^3 + (2m)^3 = (1 + 2m)(1 - 2m + 4m^2).$$

$$(d) 125p^3 - 8 = (5p)^3 - 2^3 = (5p - 2)(25p^2 + 10p + 4).$$

Exercițiul 4. Efectuați rapid (aplicați formule potrivite pentru a evita dezvoltări lungi):

$$(a) (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$$

$$(b) (x + 1)^3 - (x - 1)^3$$

$$(c) (a + b)^3 + (a - b)^3$$

$$(d) (5 - t)^3 + (5 + t)^3$$

Rezolvare:

Observații-cheie: $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$;
 $(u + v)^3 - (u - v)^3 = 2(3u^2v + v^3)$; $(u + v)^3 + (u - v)^3 = 2u(u^2 + 3v^2)$.

$$(a) (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) = (2x)^3 - (3y)^3 = 8x^3 - 27y^3.$$

$$(b) (x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 2(3x^2 \cdot 1 + 1^3) = 6x^2 + 2.$$

$$(c) (a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2).$$

$$(d) (5 - t)^3 + (5 + t)^3 = 2 \cdot 5(5^2 + 3t^2) = 10(25 + 3t^2) = 250 + 30t^2.$$

Exercițiul 5. Factorizări complete. Scrieți expresiile ca produse:

$$(a) x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(b) 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$(c) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$(d) 27y^3 - 1$$

Rezolvare:

Recunoaștem cubul binomului” și diferența de cuburi”; pentru $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ folosim identitatea lui SOPHIE-GERMAIN:

$$(a) x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3.$$

$$(b) 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)^3.$$

$$(c) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

(Valoarea este 0 dacă $a + b + c = 0$.)

$$(d) 27y^3 - 1 = (3y)^3 - 1^3 = (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1).$$

Exercițiul 6. Calcul numeric (folosiți formulele de cub):

$$(a) 1001^3 - 999^3$$

$$(b) 51^3 - 49^3$$

$$(c) 2003^3 - 1997^3$$

Rezolvare:

Fol: $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 6x^2 + 2$; *mai general* $(x + h)^3 - (x - h)^3 = 6x^2h + 2h^3$.

$$(a) 1001^3 - 999^3 = (1000 + 1)^3 - (1000 - 1)^3 = 6 \cdot 1000^2 + 2 = 6,000,002.$$

$$(b) 51^3 - 49^3 = (50 + 1)^3 - (50 - 1)^3 = 6 \cdot 50^2 + 2 = 15,002.$$

$$(c) 2003^3 - 1997^3 = (2000 + 3)^3 - (2000 - 3)^3 \\ = 6 \cdot 2000^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^3 = 72,000,000 + 54 = 72,000,054.$$

Exercițiul 7. Verificări de identități. Arătați că egalitățile sunt adevărate, dezvoltând corect:

$$(a) (a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$$

$$(b) (a + b)^3 - (a - b)^3 = 2b(3a^2 + b^2)$$

Rezolvare:

Dezvoltăm fiecare cub și grupăm termenii.

$$\begin{aligned}(a) (a + b)^3 + (a - b)^3 &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) \\ &= 2a^3 + 6ab^2 = 2a(a^2 + 3b^2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) (a + b)^3 - (a - b)^3 &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) \\ &= 6a^2b + 2b^3 = 2b(3a^2 + b^2).\end{aligned}$$

Exercițiul 8. Ecuații prin formule de cub. Rezolvați în R :

$$(a) (x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 728$$

$$(b) (t + 2)^3 - (t - 2)^3 = 208$$

$$(c) (2y + 3)^3 - (2y - 3)^3 = 342$$

Rezolvare:

Fol: $(u + v)^3 - (u - v)^3 = 2v(3u^2 + v^2)$.

$$\begin{aligned}(a) u = x, v = 1: \quad 2(1)(3x^2 + 1) &= 728 \Rightarrow 6x^2 + 2 = 728 \\ \Rightarrow 6x^2 &= 726 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = \pm 11.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) u = t, v = 2: \quad 2(2)(3t^2 + 4) &= 208 \Rightarrow 12t^2 + 16 = 208 \\ \Rightarrow 12t^2 &= 192 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = \pm 4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c) u = 2y, v = 3: \quad 2(3)(3(2y)^2 + 9) &= 342 \\ \Rightarrow 6(12y^2 + 9) &= 342 \Rightarrow 72y^2 + 54 = 342 \\ \Rightarrow 72y^2 &= 288 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2.\end{aligned}$$

Succes!