



Rezolvare - Fișă de lucru

Lecția 3 - Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale reprezentate prin litere

Clasa a 8-a – Capitolul 2 - Calcul algebric în R

Instrucțiuni

Încearcă să rezolvi toate exercițiile fără ajutor. Durata recomandată:
30–40 de minute.

Exerciții

Exercițiul 1. Efectuați (aplicați regulile: $(ab)^n = a^n b^n$, $(a^m)^n = a^{mn}$):

- (a) $(-3x)^2$
- (b) $(2x^3)^3$
- (c) $(-5y^2)^4$
- (d) $(-2a^4)^3$
- (e) $(4x^2y)^2$
- (f) $(-3xy^3)^3$
- (g) $(5a^2b^3)^2$
- (h) $(-2x^3y^2)^4$

Rezolvare:

Principiu: ridicăm separat coeficientul și fiecare literă la putere; la puterea pară

dispare semnul minus.

$$(a) (-3x)^2 = (-3)^2 x^2 = 9x^2.$$

$$(b) (2x^3)^3 = 2^3 x^{3 \cdot 3} = 8x^9.$$

$$(c) (-5y^2)^4 = (-5)^4 y^8 = 625y^8.$$

$$(d) (-2a^4)^3 = (-2)^3 a^{12} = -8a^{12}.$$

$$(e) (4x^2y)^2 = 4^2 x^4 y^2 = 16x^4 y^2.$$

$$(f) (-3xy^3)^3 = (-3)^3 x^3 y^9 = -27x^3 y^9.$$

$$(g) (5a^2b^3)^2 = 5^2 a^4 b^6 = 25a^4 b^6.$$

$$(h) (-2x^3y^2)^4 = (-2)^4 x^{12} y^8 = 16x^{12} y^8.$$

Exercițiul 2. Efectuați și simplificați (folosiți și $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$):

$$(a) (2x^2)^3 \cdot (x^4)^2$$

$$(b) (-3a^3)^2 \cdot (a^5)^3$$

$$(c) \left(\frac{12x^5y^3}{3x^2y} \right)^2$$

$$(d) \left[\frac{8a^4b^2}{2ab^3} \right]^3$$

Rezolvare:

Principiu: întâi calculăm fiecare putere, apoi adunăm/scădem exponenții când înmulțim/împărțim.

$$(a) (2x^2)^3 \cdot (x^4)^2 = 2^3 x^6 \cdot x^8 = 8x^{14}.$$

$$(b) (-3a^3)^2 \cdot (a^5)^3 = 9a^6 \cdot a^{15} = 9a^{21}.$$

$$(c) \left(\frac{12}{3} x^{5-2} y^{3-1} \right)^2 = (4x^3 y^2)^2 = 16x^6 y^4.$$

$$(d) \left(\frac{8}{2} a^{4-1} b^{2-3} \right)^3 = (4a^3 b^{-1})^3 = 64a^9 b^{-3} = \frac{64a^9}{b^3}.$$

Exercițiul 3. Calculați și aduceți la formă canonică:

$$(a) (6x^2)^3 + (-4x^3)^2$$

$$(b) (2y^5)^3 - (3y^4)^2$$

$$(c) (-5a^2b)^3 + (2ab^2)^3$$

$$(d) (7x^2y)^2 - (xy^3)^3$$

Rezolvare:

Principiu: aplicăm puterile apoi adunăm/scădem termenii asemenea (dacă există).

$$(a) (6x^2)^3 + (-4x^3)^2 = 216x^6 + 16x^6 = 232x^6.$$

$$(b) (2y^5)^3 - (3y^4)^2 = 8y^{15} - 9y^8.$$

$$(c) (-5a^2b)^3 + (2ab^2)^3 = -125a^6b^3 + 8a^3b^6.$$

$$(d) (7x^2y)^2 - (xy^3)^3 = 49x^4y^2 - x^3y^9.$$

Exercițiul 4. Scrieți sub forma unei singure puteri:

$$(a) x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdots x^{20}$$

$$(b) x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 \cdots x^{100}$$

$$(c) x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdots x^{99}$$

Rezolvare:

Principiu: $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$. Suma primelor n numere naturale: $\frac{n(n+1)}{2}$; suma primelor n numere impare: n^2 .

$$(a) x^{1+2+\cdots+20} = x^{\frac{20 \cdot 21}{2}} = x^{210}.$$

$$(b) x^{2+4+\cdots+100} = x^{2(1+2+\cdots+50)} = x^{2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2}} = x^{2550}.$$

$$(c) x^{1+3+\cdots+99} = x^{50^2} = x^{2500}.$$

Exercițiul 5. Exprimă ca putere a lui x și y (simplificat):

$$(a) (x^3y^2)^4 \cdot (x^5y)^2 : (xy^3)^3$$

$$(b) \frac{(2x^2y^5)^3 \cdot (3xy)^2}{(6x^4y)^2}$$

$$(c) \left[\frac{x^6y^3}{(x^2y)^2} \right]^3$$

Rezolvare:

$$(a) (x^{12}y^8) \cdot (x^{10}y^2) : (x^3y^9) = x^{22}y^{10} \cdot x^{-3}y^{-9} = x^{19}y.$$

$$(b) \frac{8x^6y^{15} \cdot 9x^2y^2}{36x^8y^2} = \frac{72x^8y^{17}}{36x^8y^2} = 2y^{15}.$$

$$(c) \left[\frac{x^6y^3}{x^4y^2} \right]^3 = (x^2y)^3 = x^6y^3.$$

Exercițiul 6. Determinați exponentul necunoscut (se consideră $x \neq 0$, $y \neq 0$):

$$(a) (x^3)^n \cdot x^5 = x^{29}$$

$$(b) \frac{(y^4)^m}{y^3} = y^{21}$$

$$(c) (x^2y)^p = (xy^3)^6$$

Rezolvare:

$$(a) x^{3n+5} = x^{29} \Rightarrow 3n + 5 = 29 \Rightarrow n = 8.$$

$$(b) y^{4m-3} = y^{21} \Rightarrow 4m - 3 = 21 \Rightarrow m = 6.$$

$$(c) (x^2y)^p = x^{2p}y^p, \quad (xy^3)^6 = x^6y^{18}.$$

Pentru egalitate pentru orice $x, y \neq 0$, trebuie $2p = 6$ și $p = 18$, contradicție.

$\Rightarrow$ **Nu există** astfel de p .

Exercițiul 7. Completați corect spațiile libere:

$$(a) (ab)^7 = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(b) (a^5)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(c) \frac{a^{12}}{a^5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(d) a^4 \cdot a^9 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Rezolvare:

$$(a) a^7 \cdot b^7; \quad (b) a^{15}; \quad (c) a^7; \quad (d) a^{13}.$$

Exercițiul 8. Stabiliți **semnul** expresiei, în funcție de paritatea exponentului (nu calculați numeric):

- (a) $(-3x^2)^n$, pentru $x \neq 0$
- (b) $(-a)^m \cdot (a^2)^m$, pentru $a \neq 0$
- (c) $(-xy)^k : (-x)^k$, pentru $x \neq 0, y \neq 0$

Rezolvare:

Observație: $x^2 > 0$ și $a^2 > 0$ pentru $x, a \neq 0$. Semnul depinde doar de numărul de factori negativi și de paritatea exponentului.

- (a) $(-3x^2)^n < 0$ dacă n impar, > 0 dacă n par.
- (b) $(-a)^m (a^2)^m = (-a^3)^m = (-1)^m a^{3m}$: negativ dacă m impar, pozitiv dacă m par.
- (c) $\frac{(-xy)^k}{(-x)^k} = \frac{(-1)^k x^k y^k}{(-1)^k x^k} = y^k : \begin{cases} > 0, & k \text{ par,} \\ \text{are semnul lui } y, & k \text{ impar.} \end{cases}$

Succes!