

Lecția 2 – Funcții definite pe mulțimi finite

Clasa a 8-a – Capitolul 3 - Funcții

Instrucțiuni

Reține:

- Imaginea unei funcții (mulțimea valorilor) se obține calculând $f(x)$ pentru fiecare element din domeniu.
- Graficul unei funcții definite pe o mulțime finită este o mulțime de puncte.

Durata recomandată: **40-50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Determină mulțimea valorilor (imagea funcției) pentru fiecare caz:

(a) $f : \{-4, -1, 0, 2, 5\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 2$

(b) $g : \{3, 6, 9\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 3x - 2$

(c) $h : \{-3, 1, 7, 10\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{x+1}{2}$

Exercițiul 2. Reprezintă grafic într-un sistem de axe ortogonale xOy următoarele funcții (prin puncte):

(a) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1$

(b) $g : \{0, 2, 4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = -x + 2$

Exercițiul 3. Se consideră funcția $f : \{-2, 1, 4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + 1$.

- Pentru $a = 2$, scrie coordonatele punctelor graficului și verifică dacă acestea sunt coliniare.
- Reprezintă grafic funcția pentru $a = -1$.

Exercițiul 4. Fie mulțimea $E = \{-4, 0, 4\}$ și funcțiile $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin:

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{și} \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

- (a) Reprezintă în același sistem de coordonate graficele celor două funcții.
- (b) Determină valoarea lui $x \in E$ pentru care $f(x) = g(x)$.

Exercițiul 5. Fie $M = \{-1, 0, 1\}$. Arată că, oricare ar fi numărul natural $n \in \mathbb{N}^*$, funcțiile următoare sunt egale pe domeniul M :

- (a) $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \quad \text{și} \quad g(x) = x^{2n+1}$
- (b) $p, q : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = |x| \quad \text{și} \quad q(x) = x^{2n}$

Exercițiul 6. Fie funcția $f : \{0, 2, 5\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - a$.

- (a) Determină parametrul real a , știind că punctul $A(2, 5)$ aparține graficului funcției.
- (b) Pentru valoarea a găsită, scrie mulțimea imaginilor funcției.

Exercițiul 7. Se consideră funcția $f : \{1, 3, 5, 7\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + 1$.

- (a) Determină numărul real m , știind că punctul $P(m + 1, 2m + 3)$ aparține graficului funcției f .
- (b) Pentru m găsit la punctul anterior, scrie mulțimea valorilor funcției (Imaginea funcției).

Exercițiul 8. Construiește o funcție $p : \{1, 4, 6\} \rightarrow \mathbb{R}$ care să îndeplinească simultan condițiile:

- (a) Mulțimea valorilor (Imaginea) este $\text{Im}_p = \{3, 0, 7\}$;
- (b) Funcția este strict crescătoare (adică pentru $x_1 < x_2 \Rightarrow p(x_1) < p(x_2)$).

Scrie funcția sub formă de tabel sau enumerare de perechi.

Succes!

Exercițiul 1. Determină mulțimea valorilor (imaginea funcției) pentru fiecare caz:

(a) $f : \{-4, -1, 0, 2, 5\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 2$

(b) $g : \{3, 6, 9\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 3x - 2$

(c) $h : \{-3, 1, 7, 10\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{x+1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left. \begin{aligned} f(-4) &= -4 + 2 = -2 \\ f(-1) &= -1 + 2 = 1 \\ f(0) &= 0 + 2 = 2 \\ f(2) &= 2 + 2 = 4 \\ f(5) &= 5 + 2 = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Im}_f = \{-2, 1, 2, 4, 7\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \left. \begin{aligned} g(3) &= 3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7 \\ g(6) &= 3 \cdot 6 - 2 = 18 - 2 = 16 \\ g(9) &= 3 \cdot 9 - 2 = 27 - 2 = 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Im}_g = \{7, 16, 25\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \left. \begin{aligned} h(-3) &= \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ h(1) &= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ h(7) &= \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ h(10) &= \frac{10+1}{2} = \frac{11}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Im}_h = \left\{-1, 1, 4, \frac{11}{2}\right\} \end{aligned}$$

Exercițiul 2. Reprezintă grafic într-un sistem de axe ortogonale xOy următoarele funcții (prin puncte):

(a) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1$

(b) $g : \{0, 2, 4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = -x + 2$

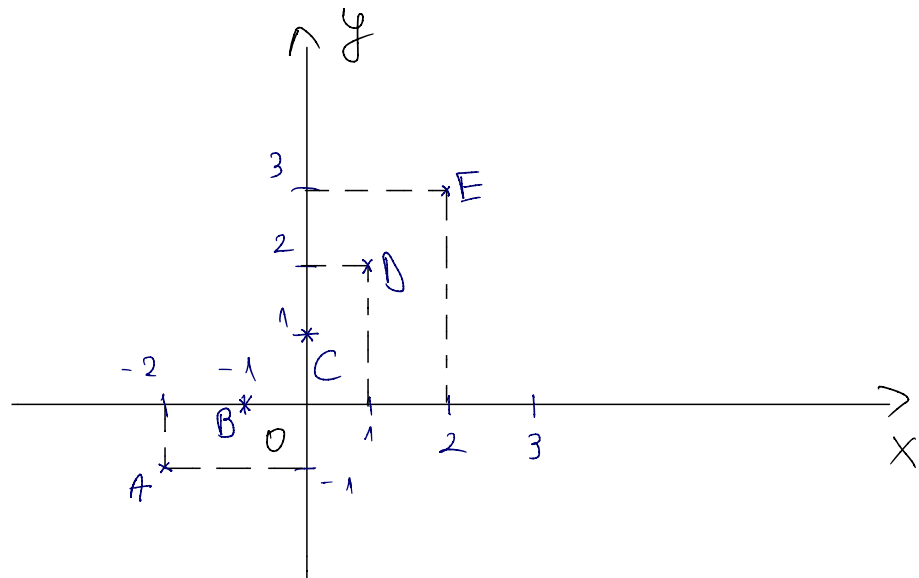
a) $f(-2) = -2 + 1 = -1 \Rightarrow A(-2, -1) \in G_f$

$f(-1) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow B(-1, 0) \in G_f$

$f(0) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow C(0, 1) \in G_f$

$f(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow D(1, 2) \in G_f$

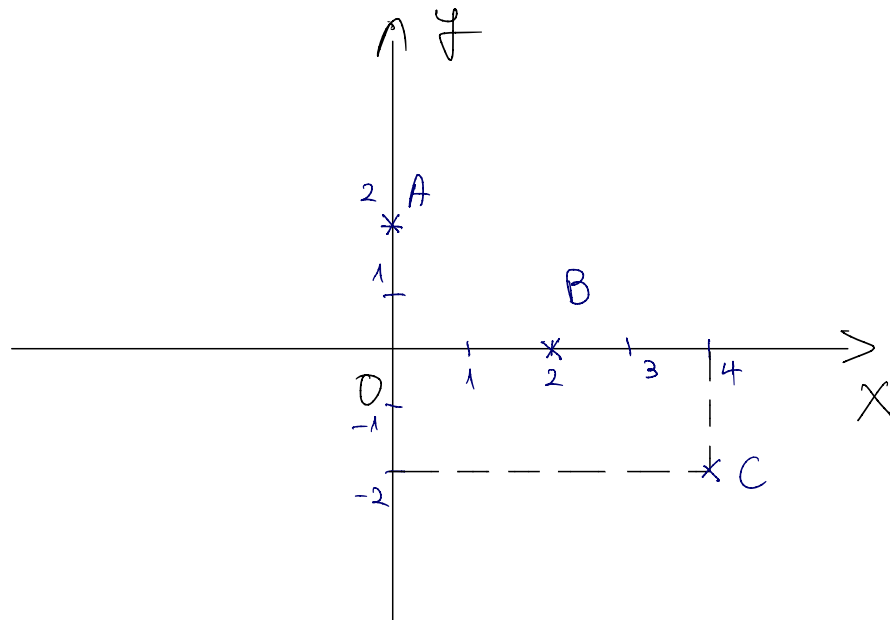
$f(2) = 2 + 1 = 3 \Rightarrow E(2, 3) \in G_f$



b) $g(0) = 0 + 2 = 2 \Rightarrow A(0, 2)$

$g(2) = -2 + 2 = 0 \Rightarrow B(2, 0)$

$g(4) = -4 + 2 = -2 \Rightarrow C(4, -2)$



Exercițiul 3. Se consideră funcția $f : \{-2, 1, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 1$.

(a) Pentru $a = 2$, scrie coordonatele punctelor graficului și verifică dacă acestea sunt coliniare.

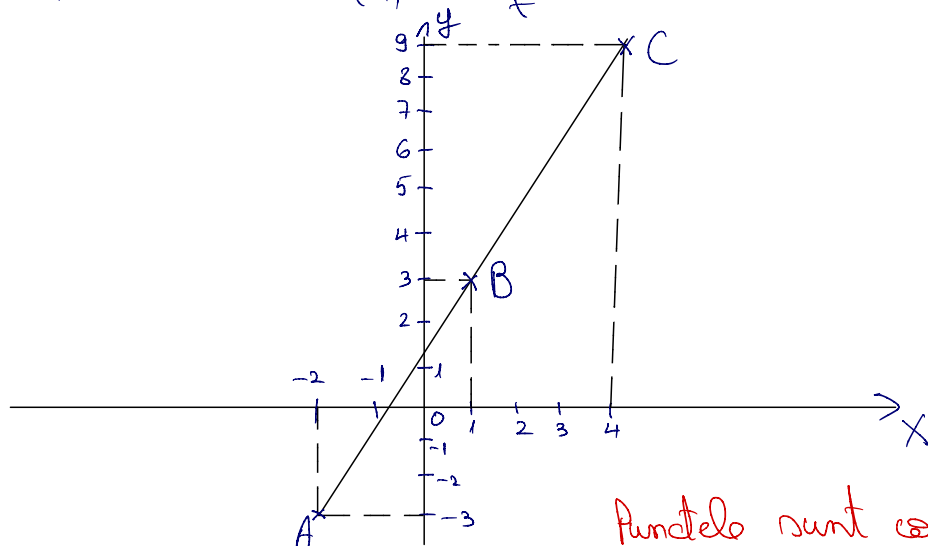
(b) Reprezintă grafic funcția pentru $a = -1$.

a) $a = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + 1$

$$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3 \Rightarrow A(-2, -3) \in G_f$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow B(1, 3) \in G_f$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9 \Rightarrow C(4, 9) \in G_f$$

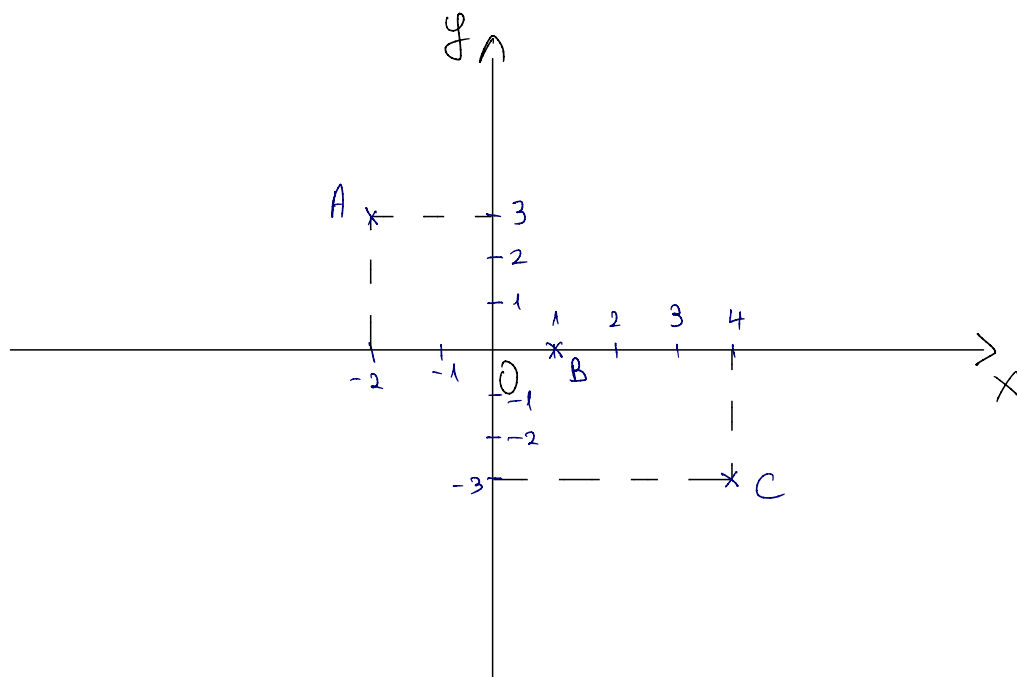


b) $a = -1 \Rightarrow f(x) = -x + 1$

$$f(-2) = -(-2) + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow A(-2, 3) \in G_f$$

$$f(1) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow B(1, 0) \in G_f$$

$$f(4) = -4 + 1 = -3 \Rightarrow C(4, -3) \in G_f$$



Exercițiul 4. Fie mulțimea $E = \{-4, 0, 4\}$ și funcțiile $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin:

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{și} \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

- (a) Reprezintă în același sistem de coordonate graficele celor două funcții.
 (b) Determină valoarea lui $x \in E$ pentru care $f(x) = g(x)$.

a) $f: \{-4, 0, 4\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$

$$f(-4) = 2 \cdot (-4) - 1 = -8 - 1 = -9 \Rightarrow A(-4, -9) \in G_f$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1 \Rightarrow B(0, -1) \in G_f$$

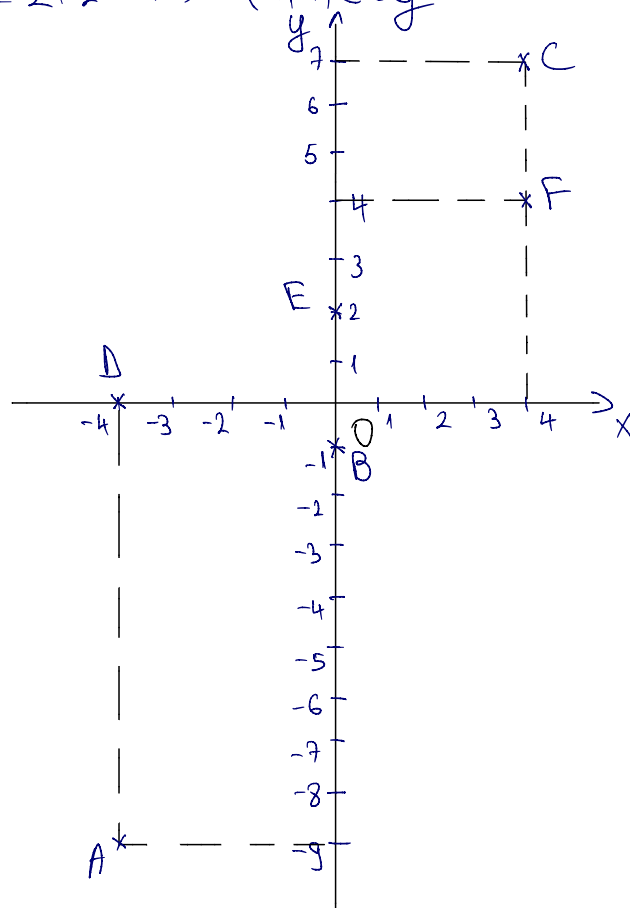
$$f(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7 \Rightarrow C(4, 7) \in G_f$$

$$g: \{-4, 0, 4\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

$$g(-4) = \frac{-4}{2} + 2 = -2 + 2 = 0 \Rightarrow D(-4, 0) \in G_g$$

$$g(0) = \frac{0}{2} + 2 = 0 + 2 = 2 \Rightarrow E(0, 2) \in G_g$$

$$g(4) = \frac{4}{2} + 2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow F(4, 4) \in G_g$$



$$b) f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 1 = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow 2x - \frac{x}{2} = 2 + 1 \Rightarrow \frac{4x - x}{2} = \frac{4 + 2}{2} \quad | \cdot 2$$

$$3x = 6 \quad | : 3$$

$$x = 2 \notin E$$

↯ Imposibil

Exercițiul 5. Fie $M = \{-1, 0, 1\}$. Arată că, oricare ar fi numărul natural $n \in \mathbb{N}^*$, funcțiile următoare sunt egale pe domeniul M :

(a) $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \quad \text{și} \quad g(x) = x^{2n+1}$

(b) $p, q : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = |x| \quad \text{și} \quad q(x) = x^{2n}$

Luăm fiecare valoare din M și verificăm egalitatea.

a) $f(-1) = -1$

$g(-1) = (-1)^{2n+1}$

$2n+1 \rightarrow$ mereu impar

$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -1 \\ g(-1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) = g(-1)$

$f(0) = 0$

$g(0) = 0^{2n+1} = 0$

$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ g(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = g(0)$

$f(1) = 1$

$g(1) = 1^{2n+1} = 1$

$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ g(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = g(1)$

Toate valorile coincid, deci $f = g$.

b) $p(-1) = |-1| = 1$

$q(-1) = (-1)^{2n}$

$2n \rightarrow$ mereu par

$\left. \begin{array}{l} p(-1) = 1 \\ q(-1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow p(-1) = q(-1)$

$p(0) = |0| = 0$

$q(0) = 0^{2n} = 0$

$\left. \begin{array}{l} p(0) = 0 \\ q(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow p(0) = q(0)$

$p(1) = |1| = 1$

$q(1) = 1^{2n} = 1$

$\left. \begin{array}{l} p(1) = 1 \\ q(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow p(1) = q(1)$

Toate valorile coincid, deci $f = g$.

Exercițiul 6. Fie funcția $f: \{0, 2, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - a$.

- (a) Determină parametrul real a , știind că punctul $A(2, 5)$ aparține graficului funcției.
(b) Pentru valoarea a găsită, scrie mulțimea imaginilor funcției.

$$\begin{aligned} a) \quad A(2, 5) \in G_f &\Rightarrow f(2) = 5 \\ f(x) = x - a &\Rightarrow f(2) = 2 - a \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\Rightarrow 2 - a = 5 \quad | -2 \\ &\quad \quad \quad -a = 3 \quad | \cdot (-1) \\ &\quad \quad \quad a = -3 \end{aligned} \right\}$$

$$b) \Rightarrow f(x) = x - (-3) \Rightarrow f(x) = x + 3$$

$$f: \{0, 2, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 + 3 = 3 \\ f(2) &= 2 + 3 = 5 \\ f(5) &= 5 + 3 = 8 \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow \text{Im}_f = \{3, 5, 8\}$$

Exercițiul 7. Se consideră funcția $f: \{1, 3, 5, 7\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + 1$.

- (a) Determină numărul real m , știind că punctul $P(m+1, 2m+3)$ aparține graficului funcției f .
(b) Pentru m găsit la punctul anterior, scrie mulțimea valorilor funcției (Imaginea funcției).

$$\begin{aligned} a) \quad P(m+1, 2m+3) \in G_f &\Rightarrow f(m+1) = 2m+3 \\ f(x) = mx + 1 &\Rightarrow f(m+1) = m(m+1) + 1 = m^2 + m + 1 \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow$$

$$m^2 + m + 1 = 2m + 3 \quad | -2m - 3$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$m^2 - 2m + m - 2 = 0$$

$$\text{Dăm factor comun: } m(m-2) + (m-2) = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} m-2 &= 0 \quad | +2 & \text{ sau } & m+1 = 0 \quad | -1 \\ m &= 2 & & m = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Dacă } m=2: f(x) = 2x + 1$$

$$P(2+1, 2 \cdot 2 + 3) \Rightarrow P(3, 7)$$

$$3 \in \{1, 3, 5, 7\} \Rightarrow m=2 \text{ valid}$$

$$\text{Dacă } m=-1: f(x) = -x + 1$$

$$P(-1+1, 2 \cdot (-1) + 3) \Rightarrow P(0, 1)$$

$$0 \notin \{1, 3, 5, 7\} \Rightarrow m=-1 \text{ nu convine}$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{Dacă } m=2: \text{ valid} \\ &\text{Dacă } m=-1: \text{ nu convine} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m=2$$

$$b) m=2 \Rightarrow f(x)=2x+1$$

$$f(1)=2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$f(3)=2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$f(5)=2 \cdot 5 + 1 = 10 + 1 = 11$$

$$f(7)=2 \cdot 7 + 1 = 14 + 1 = 15$$

$$\Rightarrow \text{Im}_f = \{3, 7, 11, 15\}$$

Exercițiul 8. Construiește o funcție $p : \{1, 4, 6\} \rightarrow \mathbb{R}$ care să îndeplinească simultan condițiile:

(a) Mulțimea valorilor (Imaginea) este $\text{Im}_p = \{3, 0, 7\}$;

(b) Funcția este strict crescătoare (adică pentru $x_1 < x_2 \Rightarrow p(x_1) < p(x_2)$).

Scrie funcția sub formă de tabel sau enumerare de perechi.

De la b) $\Rightarrow$ Trebuie să avem toate elementele atribuite în ordine crescătoare.

$$\text{Domeniul } A = \{1, 4, 6\} \quad 1 < 4 < 6$$

$$\text{Imaginea } B = \{0, 3, 7\} \quad 0 < 3 < 7$$

$$\text{Și asocierea: } p(1)=0$$

$$p(4)=3$$

$$p(6)=7$$

$$\Rightarrow \text{Funcția este: } p: A \rightarrow B$$

$$p: \{1, 4, 6\} \rightarrow \{0, 3, 7\} \text{ cu asocierea de mai sus}$$