

Lecția 1 – Noțiunea de funcție

Clasa a 8-a – Capitolul 3 - Funcții

Instrucțiuni

Definiție: O funcție $f : A \rightarrow B$ este o lege care asociază **fiecărui** element din mulțimea A un **unic** element din mulțimea B .

Notatie: A este domeniul de definiție, B este codomeniul, iar legea de corespondență este dată de $y = f(x)$.

Durata recomandată: **40 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Pentru fiecare relație $R \subset A \times B$ de mai jos, stabiliți dacă aceasta definește o funcție $f : A \rightarrow B$. În caz contrar, justificați răspunsul.

- (a) $A = \{-1, 0, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $R = \{(-1, 3), (0, 1), (2, 1)\}$
- (b) $A = \{-1, 0, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $R = \{(-1, 5), (0, 5), (0, 3), (2, 1)\}$
- (c) $A = \{-2, 1, 4\}$, $B = \{0, 2\}$, $R = \{(-2, 0), (1, 2)\}$
- (d) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $R = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

Exercițiul 2. Fie funcția $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$, unde $A = \{-3, -1, 0, 2\}$, definită prin legea $f(x) = 2x - 1$.

- (a) Determinați mulțimea valorilor funcției (Imaginea funcției, notată Im_f).
- (b) Scrieți graficul funcției ca mulțime de perechi: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.

Exercițiul 3. Fie funcția $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$, cu $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $f(x) = x^2 - 2$. Completați tabelul de valori de mai jos și determinați Im_f .

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^2 - 2$					

Exercițiul 4. O funcție $f : A \rightarrow B$ este descrisă prin graficul său:

$$G_f = \{(1, 4), (2, 7), (3, 10), (4, 13)\}$$

- (a) Identificați o lege de corespondență de forma $f(x) = ax + b$ care satisface aceste perechi.
- (b) Folosind formula găsită, verificați dacă punctul $P(0, 1)$ ar putea aparține graficului unei extensii a funcției f .

Exercițiul 5. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax - 3$, unde a este un număr real.

- (a) Determinați valoarea numărului a , știind că punctul $M(2, 5)$ aparține graficului funcției f .
- (b) Pentru valoarea a găsită, calculați $f(-1)$.

Exercițiul 6. Verificați apartenența unor valori la imaginea funcției (codomeniu):

- (a) Fie $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x - 2$. Verificați dacă $-2 \in \text{Im}_f$ și dacă $5 \in \text{Im}_f$.
- (b) Fie $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = n(n + 1)$. Verificați dacă numărul 12 este o valoare a funcției g (adică dacă $12 \in \text{Im}_g$).

Exercițiul 7. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

- (a) Scrieți coordonatele a 5 puncte care aparțin graficului funcției.
- (b) Determinați numărul real x pentru care $f(x) = 0$.

Exercițiul 8. Costul unei curse de taxi este dat de funcția $C : \{0, 1, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{N}$, definită prin $C(k) = 7 + 3k$ (lei), unde k este numărul de kilometri întregi parcurși.

- (a) Scrieți explicit mulțimea Imagine (toate costurile posibile).
- (b) Calculați costul pentru o cursă de 4 km.
- (c) Verificați dacă există o distanță k pentru care costul cursei să fie de 25 lei.

Succes!

Exercițiul 1. Pentru fiecare relație $R \subset A \times B$ de mai jos, stabiliți dacă aceasta definește o funcție $f: A \rightarrow B$. În caz contrar, justificați răspunsul.

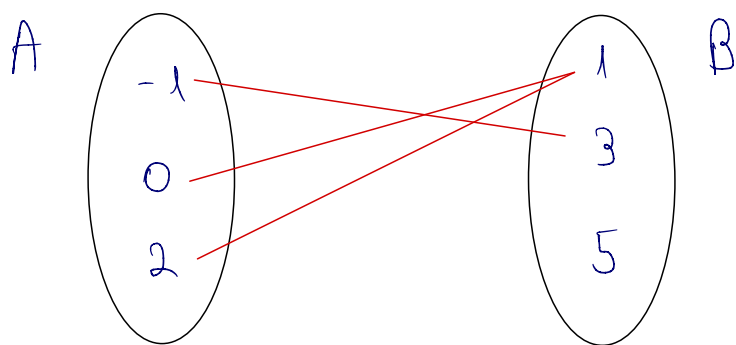
(a) $A = \{-1, 0, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $R = \{(-1, 3), (0, 1), (2, 1)\}$

(b) $A = \{-1, 0, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $R = \{(-1, 5), (0, 5), (0, 3), (2, 1)\}$

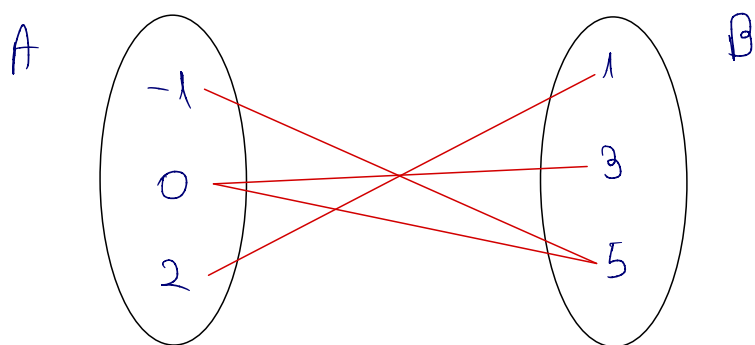
(c) $A = \{-2, 1, 4\}$, $B = \{0, 2\}$, $R = \{(-2, 0), (1, 2)\}$

(d) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $R = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

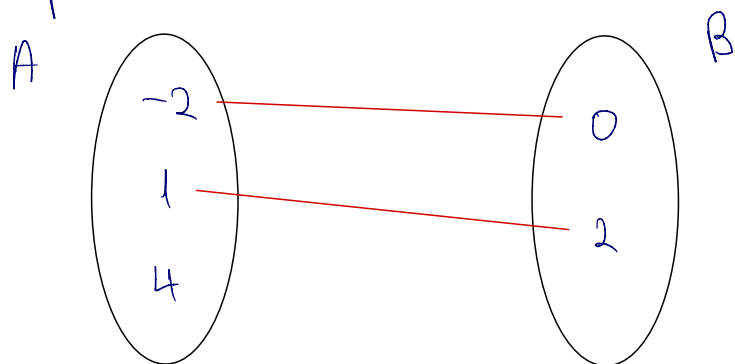
a) Este funcție, deoarece fiecărui element din A îi corespunde unul din B . Conform R :



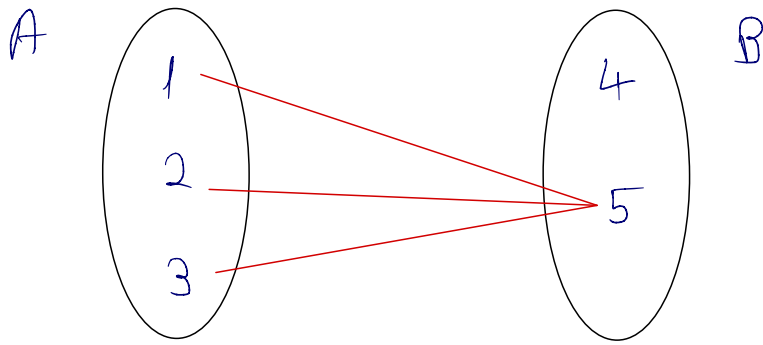
b) Nu este funcție, deoarece elementul $0 \in A$ are două corespondențe în B : $f(0) = 5$ și $f(0) = 3$. Conform R :



c) Nu este funcție, deoarece elementul $4 \in A$ nu are niciun corespondent în B . Conform R :



d) Este funcție, deoarece fiecărui element din A îi corespunde unul din B. Conform R:



Exercițiul 2. Fie funcția $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$, unde $A = \{-3, -1, 0, 2\}$, definită prin legea $f(x) = 2x - 1$.

(a) Determinați mulțimea valorilor funcției (Imaginea funcției, notată Im_f).

(b) Scrieți graficul funcției ca mulțime de perechi: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.

a) Calculăm valorile:

$$f(-3) = 2 \cdot (-3) - 1 = -6 - 1 = -7$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow \text{Im}_f = \{-7, -3, -1, 3\}$$

$$b) f(-3) = -7 \Rightarrow (-3; -7) \in G_f$$

$$f(-1) = -3 \Rightarrow (-1; -3) \in G_f$$

$$f(0) = -1 \Rightarrow (0; -1) \in G_f$$

$$f(2) = 3 \Rightarrow (2; 3) \in G_f$$

$$\Rightarrow G_f = \{(-3; -7), (-1; -3), (0; -1), (2; 3)\}$$

Exercițiul 3. Fie funcția $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$, cu $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $f(x) = x^2 - 2$. Completați tabelul de valori de mai jos și determinați Im_f .

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	2

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f(-2) = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$f(0) = 0^2 - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$f(1) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \text{Im}_f = \{-2, -1, 2\} \text{ (elementele se scriu o singură dată)}$$

Exercițiul 4. O funcție $f : A \rightarrow B$ este descrisă prin graficul său:

$$G_f = \{(1, 4), (2, 7), (3, 10), (4, 13)\}$$

- Identificați o lege de corespondență de forma $f(x) = ax + b$ care satisface aceste perechi.
- Folosind formula găsită, verificați dacă punctul $P(0, 1)$ ar putea aparține graficului unei extensii a funcției f .

a) Observăm că valorile cresc din 3 în 3 ($4 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 13$). Acest lucru sugerează coeficientul lui x ca fiind 3.

Dacă $f(x)$ ar fi egal cu $3x$, am avea $f(1) = 3 \cdot 1 = 3$. Avem nevoie de 4, deci adăugăm 1.

$$f : A \rightarrow B, f(x) = 3x + 1$$

$$\text{Verificare: } f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$f(4) = 3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13$$

b) Trebuie verificat dacă $f(0) = 1$ pentru ca $P(0, 1) \in G_f$

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{Adevărat}$$

Exercițiul 5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax - 3$, unde a este un număr real.

- (a) Determinați valoarea numărului a , știind că punctul $M(2, 5)$ aparține graficului funcției f .
(b) Pentru valoarea a găsită, calculați $f(-1)$.

$$\begin{aligned} a) \quad M(2, 5) \in G_f &\Rightarrow f(2) = 5 \\ f(x) = ax - 3 &\Rightarrow f(2) = 2a - 3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a) \quad M(2, 5) \in G_f &\Rightarrow f(2) = 5 \\ f(x) = ax - 3 &\Rightarrow f(2) = 2a - 3 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2a - 3 &= 5 \quad | +3 \\ 2a &= 8 \quad | :2 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad a = 4 &\Rightarrow f(x) = 4x - 3 \\ f(-1) &= 4 \cdot (-1) - 3 = -4 - 3 = -7 \end{aligned}$$

Exercițiul 6. Verificați apartenența unor valori la imaginea funcției (codomeniu):

- (a) Fie $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x - 2$. Verificați dacă $-2 \in \text{Im}_f$ și dacă $5 \in \text{Im}_f$.
(b) Fie $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = n(n+1)$. Verificați dacă numărul 12 este o valoare a funcției g (adică dacă $12 \in \text{Im}_g$).

$$\begin{aligned} a) \quad f: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}; \quad f(x) = 3x - 2 \\ -2 \in \text{Im}_f &\Rightarrow \text{Există un } x \text{ pt. care } f(x) = -2 \\ \Rightarrow 3x - 2 &= -2 \quad | +2 \\ 3x &= 0 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{Z} \quad \text{Adevărat} \Rightarrow -2 \in \text{Im}_f \\ 5 \in \text{Im}_f &\Rightarrow \text{Există un } x \text{ pt. care } f(x) = 5 \\ \Rightarrow 3x - 2 &= 5 \quad | +2 \\ 3x &= 7 \quad | :3 \\ x &= \frac{7}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Fals} \Rightarrow 5 \notin \text{Im}_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad g: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad g(n) = n(n+1) \\ 12 \in \text{Im}_g &\Rightarrow g(n) = 12 \Rightarrow n(n+1) = 12 \quad \left. \vphantom{12 \in \text{Im}_g} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &2 \text{ numere consecutive} \\ &\text{care înmulțite dau } 12 \end{aligned} \\ 3 \cdot 4 &= 12 \Rightarrow n = 3 \in \mathbb{N} \Rightarrow g(3) = 12 \quad \text{Adevărat} \Rightarrow 12 \in \text{Im}_g \end{aligned}$$

Exercițiul 7. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

(a) Scrieți coordonatele a 5 puncte care aparțin graficului funcției.

(b) Determinați numărul real x pentru care $f(x) = 0$.

a) Alegem 5 valori pentru x :

$$x=0 \Rightarrow f(0)=2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow A(0,1) \in G_f$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow B(1,3) \in G_f$$

$$x=2 \Rightarrow f(2)=2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow C(2,5) \in G_f$$

$$x=3 \Rightarrow f(3)=2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7 \Rightarrow D(3,7) \in G_f$$

$$x=4 \Rightarrow f(4)=2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9 \Rightarrow E(4,9) \in G_f$$

$$\begin{aligned} b) f(x) &= 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \quad | -1 \\ 2x &= -1 \quad | :2 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercițiul 8. Costul unei curse de taxi este dat de funcția $C: \{0, 1, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{N}$, definită prin $C(k) = 7 + 3k$ (lei), unde k este numărul de kilometri întregi parcurși.

(a) Scrieți explicit mulțimea Imagine (toate costurile posibile).

(b) Calculați costul pentru o cursă de 4 km.

(c) Verificați dacă există o distanță k pentru care costul cursei să fie de 25 lei.

$$a) C: \{0, 1, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{N}, C(k) = 3k + 7$$

$$C(0) = 3 \cdot 0 + 7 = 0 + 7 = 7$$

$$C(1) = 3 \cdot 1 + 7 = 3 + 7 = 10$$

$$C(2) = 3 \cdot 2 + 7 = 6 + 7 = 13$$

$$C(3) = 3 \cdot 3 + 7 = 9 + 7 = 16$$

$$C(4) = 3 \cdot 4 + 7 = 12 + 7 = 19$$

$$C(5) = 3 \cdot 5 + 7 = 15 + 7 = 22$$

$$C(6) = 3 \cdot 6 + 7 = 18 + 7 = 25$$

$$C(7) = 3 \cdot 7 + 7 = 21 + 7 = 28$$

$$C(8) = 3 \cdot 8 + 7 = 24 + 7 = 31$$

$$C(9) = 3 \cdot 9 + 7 = 27 + 7 = 34$$

$$C(10) = 3 \cdot 10 + 7 = 30 + 7 = 37$$

$$\Rightarrow \text{Im}_C = \{7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37\}$$

$$b) C(4) = 19$$

$$c) 25 \in \text{Im}_C \Rightarrow 25 = C(k) \Rightarrow 7 + 3k = 25 \quad | -7$$

$$3k = 18 \quad | :3 \Rightarrow k = 6, \text{ există}$$