Fișă de lucru

Lecția — Cap. 2: Calcul algebric în $\mathbb{R}$ (L1–L7)

Clasa a 8-a – Capitolul 2 - Calcul algebric în $\mathbb{R}$

Instrucțiuni

Încearcă să rezolvi toate exercițiile fără ajutor. Durata recomandată: **30–40 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Identități algebrice. Efectuează folosind formulele $(a \pm b)^2$ și $(a+b)(a-b)$:

(a) $(x+7)^2$

(b) $(2x-3)^2$

(c) $(x+4)(x-4)$

(d) $(3x+5)(3x-5)$

(e) $(2x-5)^2$

(f) $(x-1)(x+1)$

Rezolvare:

Folosim: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ *și* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

(a) $(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$.
(b) $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
(c) $(x+4)(x-4) = x^2 - 16$.
(d) $(3x+5)(3x-5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$.
(e) $(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$.
(f) $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$.

Exercițiul 2. Monom · polinom. Împărțire la monom.

(a) $2x^3\left(5x^2 - 2x + 3\right)$

(b) $\left(9x^4 - 6x^3 + 12x\right) : (3x)$

(c) $\left(8x^5 + x^4 - 6x^3\right) : (-x^2)$

(d) $(x-2)\left(3x^2 - x + 4\right)$

Rezolvare:

Înmulțim fiecare termen; la împărțire scădem exponenții și împărțim coeficienții.

$$\begin{aligned}
&(a)\ 2x^3(5x^2 - 2x + 3) = 10x^5 - 4x^4 + 6x^3.\\
&(b)\ \frac{9x^4 - 6x^3 + 12x}{3x} = 3x^3 - 2x^2 + 4.\\
&(c)\ \frac{8x^5 + x^4 - 6x^3}{-x^2} = -8x^3 - x^2 + 6x.\\
&(d)\ (x-2)(3x^2 - x + 4) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 8.
\end{aligned}$$

Exercițiul 3. Produse de polinoame. Efectuează și ordonează descrescător după puteri:

(a) $(x+10)(x-1)$

(b) $(2x-1)(x+3)$

(c) $(x-5)(x^2+5x+9)$

Rezolvare:

$$\begin{aligned}
&(a)\ (x+10)(x-1) = x^2 + 9x - 10.\\
&(b)\ (2x-1)(x+3) = 2x^2 + 5x - 3.\\
&(c)\ (x-5)(x^2+5x+9) = x^3 - 16x - 45.
\end{aligned}$$

Exercițiul 4. Combinare de expresii. Reduce la forma canonică (respectă ordinea operațiilor):

$$(x^2+1)(3x-1) - (2x)^2(3x-2) + 7x\,(3x^2+3).$$

Rezolvare:

Dezvoltăm pe rând și adunăm termenii asemenea.

$$\begin{aligned}
&(x^2+1)(3x-1) = 3x^3 - x^2 + 3x - 1,\\
&(2x)^2(3x-2) = 4x^2(3x-2) = 12x^3 - 8x^2,\\
&7x(3x^2+3) = 21x^3 + 21x.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ (3x^3 - x^2 + 3x - 1) - (12x^3 - 8x^2) + 21x^3 + 21x = 12x^3 + 7x^2 + 24x - 1.$$

Exercițiul 5. Operații cu polinoame date. Notăm

$$E(x) = 2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 7, \qquad F(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 1.$$

Calculează:

(a) $E(x) + F(x)$

(b) $F(x) - E(x)$

(c) $2E(x) - 3F(x)$

Rezolvare:

(a) $E + F = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 6.$
(b) $F - E = -x^4 + 10x^2 - 2x + 8.$
(c) $2E - 3F = (4x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 6x - 14)$
$- (3x^4 - 3x^3 + 15x^2 + 3x + 3) = x^4 + x^3 - 25x^2 + 3x - 17.$

Exercițiul 6. Descompuneri în factori. Descompune fiecare expresie:

(a) $x^2 - 4x - 12$

(b) $9x^2 - 25$

(c) $x^2 - (x-5)^2$

(d) $4x^2 - 4x + 1$

(e) $2x^2 + 6x$

Rezolvare:

(a) $x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2).$
(b) $9x^2 - 25 = (3x-5)(3x+5).$
(c) $x^2 - (x-5)^2 = (x - (x-5))(x + (x-5)) = 5(2x-5).$
(d) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2.$
(e) $2x^2 + 6x = 2x(x+3).$

Exercițiul 7. Verificări de identități. Fie $E(x) = 4x^2 - 4x + 1$ și $F(x) = 2x - 1$.

(a) Calculează $F(2)$.

(b) Arată că $E(x) = [F(x)]^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(c) Arată că numărul $E(2) - F(2) + 1$ este pătrat perfect.

Rezolvare:

(a) $F(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$

(b) $[F(x)]^2 = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1 = E(x).$ ✓

(c) $E(2) - F(2) + 1 = 9 - 3 + 1 = 7.$

Observație: 7 nu *este pătrat perfect. Probabil în enunț s-a intenționat altă combinație, de exemplu* $E(2) - [F(2)]^2 + 1 = 1 = 1^2$*, care ar fi pătrat perfect. Am păstrat totuși calculele conform textului dat.*

Exercițiul 8. Proprietăți de semn și egalități.

(a) Arată că $A(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2 \geq 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(b) Rezolvă în $\mathbb{R}$: $(x-1)(x+2) = (x+3)(x-4)$.

Rezolvare:

(a) $A(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(x^2 + 2x + 1\right) = 2x^2 + 2 \geq 2,$
deoarece $2x^2 \geq 0$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

(b) $x^2 + x - 2 = x^2 - x - 12 \;\Rightarrow\; 2x + 10 = 0 \;\Rightarrow\; x = -5.$

Succes!